N° d'ordre 279

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Michel CAPDEVILLE-CAZENAVE

Étude des propriétés analytiques des amplitudes d'hélicité à deux corps pour des réactions concernant des particules de masse nulle

Soutenue le 9 octobre 1969, devant la Commission d'Examen :

MM. M. RIMPAULT ..... *Président*
L. MICHEL .....
P. MINNAERT ..... *Examinateurs*
H. NAVELET .....

— 1969 —

N° d'ordre 279

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Michel CAPDEVILLE-CAZENAVE

Étude des propriétés analytiques des amplitudes d'hélicité à deux corps pour des réactions concernant des particules de masse nulle

Soutenue le 9 octobre 1969, devant la Commission d'Examen :

MM. M. RIMPAULT ..... *Président*
L. MICHEL .....
P. MINNAERT ..... *Examinateurs*
H. NAVELET .....

— 1969 —

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITÉ
DE BORDEAUX

FACULTÉ DES SCIENCES

351, COURS DE LA LIBÉRATION - TALENCE (GIRONDE)
TÉL. BORDEAUX (56) 92.92.01

Doyen honoraire : M. BRUS

Doyen : M. VALADE

Professeurs honoraires :

M. KASTLER	Professeur à la Sorbonne
M. PISOT	Professeur à la Sorbonne
Mlle JOSIEN	Professeur à la Sorbonne
M. MILLOUX	
M. DANGEARD	
M. CAU	
M. GENEVOIS	

Professeurs -

M. BRUS	Chimie
M. AVEL	Zoologie et physiologie animale
M. ROUSSET	Physique générale
M. ROGER	Mécanique rationnelle
M. WEILL	Anatomie comparée et embryogénie
M. DUFRESNOY	Mathématiques générales
M. LAFON	Physiologie générale
M. BOUNHIOL	Biologie animale
M. SERVANT	Physique
M. CALAS	Chimie organique
M. GAY	Cristallographie et minéralogie
M. PACAULT	Chimie physique
M. SCHOELLER	Géologie
M. DAVID	Physiologie végétale
M. COLMEZ	Méthodes mathématiques de la physiq
M. CAMBAR	Biologie animale
M. VIGNEAUX	Géologie
M. PANOUSE	Zoologie (détaché à la Faculté des Sciences du Maroc)
M. ARZELIES	Physique (détaché à la Faculté des Sciences du Maroc)
M. RIBEREAU-GAYON	Oenologie et chimie agricole
M. RISS	Mathématiques
M. GUIZONNIER	Physique
M. HAGET	Zoologie expérimentale
M. SEMIROT	Astronomie
M. CHASTEL	Physique nucléaire
M. HAGENMULLER	Chimie minérale
M. CREAC'H	Biologie animale
M. LOUDETTE	Mécanique physique

M. PATY	Chimie
M. BORDES	Préhistoire
M. SECHET	Botanique
M. BAGANAS	Mathématiques
M. VALENTIN	Radioélectricité
M. ENNOUCHI	Géologie
M. EYME	Botanique
M. RUAMPS	Physique électro nique
M. FRAINNET	Chimie organique
M. HOARAU	Chimie physique
M. MARCHAND	Chimie
M. LALANDE	Chimie appliquée
M. GOTTIS	Géologie dynamique
M. LEMANCEAU	Chimie
M. CARDO	Psychophysiologie
M. ROCH	Physique
M. BELLON	Chimie (détaché à la Faculté des Sciences du Maroc)
M. CLASTRE	Cristallographie physique
M. JOUSSOT-DUBIEN	Chimie
M. VALADE	Chimie organique
M. SURDIN	Automatique
M. LABOUESSE	Biochimie
M. BLONDEL	Mathématiques
M. SOURISSEAU	Chimie
Mlle FAURE-MURET	Géologie (détachée à la Faculté des Sciences du Maroc)
M. CLIN	Géologie
M. LOCHET	Physique
M. VINDT	Biologie végétale
M. REGNIER	Mathématiques
Mlle LAFFITTE	Physique
M. DESTRIAU	Chimie
M. PETIT	Physique corpusculaire
M. BARAUD	Chimie biologique
M. EMBERGER	Géologie
M. BOTHOREL	Chimie
M. CHARRU	Physique
M. SIMONOFF	Chimie physique
M. LASCOMBE	Chimie
M. RIMPAULT	Physique théorique
M. BARETS	Biologie animale
M. PINEAU	Chimie
M. LEVEQUE	Géologie approfondie
M. BOUSSEAU	Physique
M. MENNRATH	Physique
M. ANDRE	Biologie générale
M. BOUAS-LAURENT	Chimie organique
M. MARTINET	Calcul infinitésimal
M. N.	Informatique

ïtres de conférences honoraire -

M. DE PUYMALY

ïtres de conférences -

M. RIBEREAU-GAYON Pascal	Chimie oenologie
Mlle DUTRIEU	Physiologie animale
Mme PETIT	Physique
M. BERNET	Génétique
M. FRESNEL	Mathématiques
M. MOYES	Géologie
M. LUTZ	Botanique
M. MOULINES	Chimie
M. MENDES-FRANCE	Mathématiques
M. POUCHARD	Chimie minérale
M. SARDOS	Physique
M. DUMERY	Mécanique
M. GARNIER	Biophysique
M. LESCA	Mathématiques
M. ARTOLA	Mathématiques
M. DRESS	Mathématiques
M. BOUARD	Biologie végétale
M. DE MAHTAN	Mathématiques
M. ABGRALL	Physique théorique
M. MINNAERT	Physique théorique
M. N...	Chimie minérale

nseiller Administratif -

M. LLORENS

REMERCIEMENTS

Monsieur le Professeur Rimpault a accepté de patronner cette thèse et je lui exprime ma profonde gratitude.

Je remercie très vivement le Professeur Michel qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et accepter de faire partie de ce jury.

Une grande partie de ce travail a été effectuée dans le département de Physique théorique du C. E. N. de Saclay dirigé par Monsieur C. Bloch. L'ambiance stimulante que j'y ai trouvée a facilité grandement l'élaboration de ce travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur H. Navelet dont la contribution essentielle m'a constamment aidé et encouragé.

Je tiens à remercier J. P. Ader d'une coopération efficace autant qu'amicale.

Toute ma gratitude va enfin à Ph. Salin qui, par ses conseils et ses encouragements, m'a grandement aidé à apprendre mon métier de chercheur.

Que tous les membres du laboratoire veuillent bien accepter le témoignage de toute ma sympathie.

Je remercie enfin Madame Martelet et Mademoiselle Bernat qui ont assumé la tâche ingrate de dactylographier cette thèse.

TABLE DES MATIERES

PREMIERE PARTIE

Pages

RAPPELS de CINEMATIQUE RELATIVISTE 1

I - Le groupe de Lorentz restreint et le groupe de Poincaré 2

1 - Notations relativistes 2
2 - Le groupe de Lorentz $\mathcal{L}$ 5
3 - Le sous-groupe restreint 6
4 - Générateurs infinitésimaux de $\mathcal{L}$ 9
5 - Le groupe de Poincaré P 11
6 - Générateurs infinitésimaux de P 13

II - Le groupe de recouvrement du groupe de Poincaré 15

1 - Le groupe SL2(C) 15
2 - Homomorphisme de $\mathcal{L}$ et de SL2(C) 18
3 - Représentations de SU(2) 20
4 - Le groupe de recouvrement de P 25

III - Représentation des états physiques 27

1 - Propriétés générales des états 27
2 - Théorème de Wigner 28
3 - Propriété d'invariance de P^2 30
4 - Propriété d'invariance de W^2 32

(Table des Matières 2) Pages

IV - Etats spinoriels d'une particule 36

1 - Définition des tétrades 36
2 - Définition des vecteurs de base 38
3 - Etats spinoriels pour $m \neq 0$ 41
4 - Cas d'une masse nulle 43
5 - Etats spinoriels pour $m = 0$ 47
6 - Invariance de jauge 51

V - Amplitudes spinorielles et amplitudes d'hélicité 54

1 - Amplitudes spinorielles 54
2 - Conditions de jauge 57
3 - Amplitudes d'hélicité 61
4 - Relations entre amplitudes 64

Bibliographie de la première partie 67

DEUXIEME PARTIE

PROPRIETES ANALYTIQUES des AMPLITUDES d'HELICITE
à DEUX CORPS
POUR des REACTIONS CONCERNANT des PARTICULES de MASSE NULLE 70

I - Introduction 71

II - Singularités cinématiques des amplitudes d'hélicité à deux corps dans le cas de particules de masse nulle 78

(Table des Matières 3) Pages

1 - Formalisme des particules de masse nulle 78
2 - Principe de la méthode 87
3 - Cas général de masse 89

III - Matrice de croisement pour les amplitudes d'hélicité 112

1 - Particule 1 de masse nulle 112
2 - Particule 2 de masse nulle 114
3 - Conclusion 116

IV - Contraintes cinématiques · 117

1 - Cas d'une particule de masse nulle 118
2 - Cas de deux particules de masse nulle 120
3 - Cas de trois particules de masse nulle 122

V - Sommaire et conclusions 123

Appendice 1 : Singularités cinématiques dans les cas particuliers de masse 124
Appendice 2 : Exemples 130
1 - Test de la régularisation des amplitudes d'hélicité 130
2 - Test des contraintes cinématiques 132
3 - Application à la diffusion Compton sur les nucléons 135

TROISIEME PARTIE

METHODE de CALCUL PLUS DIRECTE 142

(Table des Matières 4)

	Pages
I - Exposé de la méthode	143
1 - Principe de la méthode	143
2 - Singularités cinématiques	146
3 - Application au cas $\gamma\gamma \longrightarrow A\bar{A}$	149
4 - Calcul des contraintes	153
II - Contraintes aux seuils et pseudo-seuils	155
1 - Formalisme général	156
2 - Contraintes en $s_{34} = 0$	158
3 - Contraintes en $s_{12} = 0$	160
III - Conclusions	163
Bibliographie de la troisième partie	168

I N T R O D U C T I O N

Lorsque nous étudions l'évolution de la physique des particules élémentaires durant ces dernières années, nous remarquons d'abord un fait prédominant : c'est l'accumulation de nouveaux résultats expérimentaux de toutes sortes.

Une seconde remarque s'impose alors : malgré l'appui de toutes ces informations, il ne semble pas possible à l'heure actuelle d'en dégager une théorie complète. Ce qui veut dire qu'il n'existe pas un ensemble d'hypothèses permettant de décrire toutes les propriétés des particules élémentaires.

Le travail du physicien théoricien se borne donc pour le moment à apporter un peu de clarté sur certains problèmes particuliers et il peut arriver à ce résultat en utilisant diverses méthodes.

En particulier, il peut construire des modèles phénoménologiques plus ou moins complexes permettant de décrire les résultats expérimentaux actuels. C'est par exemple le cas des physiciens qui utilisent les pôles de Regge ou l'absorption pour décrire les sections efficaces différentielles vers l'avant.

Il peut aussi trouver des schémas de classification permettant de mettre un peu d'ordre dans la multitude des états physiques. Dans cette optique, nous citerons les propriétés déduites de l'hypothèse de l'invariance des lois physiques par transformations du groupe de Poincaré dont les premières ont permis de classer les états représentant les particules élémentaires suivant leur masse et leur spin.

Nous pouvons remarquer que ces deux démarches sont intimement liées car on ne peut tester validement un modèle dynamique sans avoir fait une analyse phénoménologique rigoureuse des résultats expérimentaux. Et pour atteindre ce but, il est nécessaire de séparer les problèmes dynamiques des problèmes purement cinématiques. (Par problème cinématique, nous entendons les problèmes liés aux propriétés d'invariance relativiste de la mécanique quantique).

Ces problèmes sont parmi les plus anciens de la mécanique quantique. Ils furent en effet posés pour la première fois par Dirac lorsqu'il établit l'équation relativiste vérifiée par la fonction d'onde de l'électron. Il fallut ensuite attendre quelques années pour que Wigner établisse les premières traces d'une solution générale. Il fut en effet le premier à s'apercevoir que les états physiques relativistes devaient appartenir à un espace de Hilbert et que les opérateurs agissant dans cet espace étaient formés par les représentations unitaires à une phase près du groupe de Lorentz inhomogène.

Du point de vue pratique le résultat essentiel de cette étude est la classification des systèmes physiques suivant leur masse et leur spin.

Ce travail fondamental était loin d'épuiser le sujet, mais il fut publié à une époque où la plupart des physiciens portèrent leurs efforts sur l'électrodynamique quantique qui est manifestement douée de l'invariance relativiste.

Il resta donc dans l'ombre pendant quelques années. Mais la situation de la physique se mit à évoluer, l'un des aspects les plus importants des développements expérimentaux étant l'apparition de particules et de résonances de spin élevé. Citons par exemple les mésons vectoriels et les résonances baryoniques.

Avec l'apparition de ces états de spin élevé, les complications dues au spin se sont révélées essentielles dans l'analyse des résultats expérimentaux.

Il s'est même avéré que plusieurs problèmes purement cinématiques, liés aux phénomènes expérimentaux étudiés récemment, n'étaient pas encore entièrement résolus.

Les problèmes posés par l'invariance relativiste furent ainsi à nouveau un sujet d'étude pour les physiciens. Ces problèmes furent surtout résolus à l'aide des résultats de Wigner sur la théorie des représentations du groupe de Poincaré. Les premiers physiciens à reprendre cette étude furent ceux ayant travaillé en contact avec Wigner, nous citerons par exemple Bargman, Michel et Wightman.

Mais il est clair que les considérations de ces auteurs sont de nature purement cinématique et, en vue des études phénoménologiques, elles doivent être complétées par une étude des propriétés dynamiques.

Ces hypothèses dynamiques ne peuvent être raisonnablement formulées que sur des amplitudes dites spinorielles.

Le problème de la compatibilité des propriétés d'analyticité provenant des hypothèses dynamiques et des propriétés dues à l'invariance relativiste s'est alors posé.

Ce problème a d'abord été résolu par Hepp puis par Williams qui, en utilisant les travaux de Joos sur l'invariance relativiste, a trouvé des amplitudes invariantes jouissant des bonnes propriétés d'analyticité.

Mais ces amplitudes invariantes ont un gros défaut : elles ne sont pas directement reliées aux processus où les particules initiales et finales ont des

polarisations bien déterminées. D'autre part, elles se prêtent mal à l'exploitation des propriétés de symétries discrètes telles que la parité et le renversement du temps.

Il était donc intéressant de trouver des amplitudes satisfaisant aux propriétés des amplitudes invariantes et liées directement aux phénomènes étudiés. Ce résultat a été obtenu en partie par Jacob et Wick qui ont introduit les amplitudes d'hélicité.

Mais ces amplitudes se trouvent cependant avoir un défaut majeur : alors que les singularités des amplitudes invariantes proviennent de propriétés dynamiques, les amplitudes d'hélicité possèdent en outre des singularités d'origine cinématique. Donc, lorsque l'on veut expliquer les résultats expérimentaux en reggéifiant les amplitudes d'hélicité, le premier problème qui se pose est de trouver des combinaisons de ces amplitudes qui soient de parité déterminée et qui soient débarrassées de leurs singularités cinématiques.

Ce n'est qu'une fois ce travail accompli que l'on peut approximer ces combinaisons par des formes de Regge, car celles-ci sont, a priori, des formes phénoménologiques régulières ne possédant pas de singularités cinématiques.

Il se posait donc un problème de cinématique dont la solution générale a été donnée récemment par Cohen-Tannoudji, Morel et Navelet dans le cas d'une réaction à deux corps faisant intervenir des particules massives. Ces auteurs obtiennent un formalisme général pour construire ce qu'ils appellent "les amplitudes d'hélicité régularisées" et ils prouvent que ces amplitudes

sont débarrassées de tout point de branchement, pôles ou zéros cinématiques. Ils écrivent ensuite des relations entre ces différentes amplitudes pour des valeurs particulières de l'énergie totale du système mesurée dans le centre de masse. Ces relations, maintenant bien connues, sont appelées des contraintes. Elles introduisent des restrictions importantes dans toute hypothèse raisonnable concernant la reggéification des amplitudes d'hélicité.

Cependant tous ces résultats ont seulement été prouvés dans le cas de réactions ne comportant que des particules massives.

Dans cet ouvrage, nous allons obtenir des résultats similaires dans le cas de réactions à deux particules dont certaines peuvent avoir une masse nulle et une hélicité arbitraire. Il est évident qu'une étude spéciale était nécessaire en vue de tenir compte de façon rigoureuse des conditions de jauge provenant du fait que l'on considère des particules de masse nulle.

Dans la première partie nous avons d'abord rassemblé les formules de cinématique constamment utilisées en physique théorique des hautes énergies et introduit ensuite les amplitudes spinorielles et les amplitudes d'hélicité dans le cas particulier où l'une des masses est nulle.

Le chapitre premier traite essentiellement du groupe de Lorentz et du groupe de Poincaré qui est la base de la mécanique quantique relativiste. Nous y donnons les propriétés du groupe des transformations de Lorentz homogènes ; nous y ajoutons le groupe des translations pour obtenir le groupe de

Poincaré et nous donnons les relations de commutation qui existent entre les différents générateurs infinitésimaux de ces transformations.

Le second chapitre est consacré à l'étude des représentations du groupe SL2(C) . Nous insistons plus particulièrement sur l'homomorphisme qui existe entre le groupe de Lorentz homogène et le groupe SL2(C) , puis nous nous intéresserons aux représentations du sous-groupe SU2 homomorphe aux rotations de E_3 . Nous construirons explicitement ces représentations car elles jouent un rôle très important dans la suite de notre travail.

Nous donnerons ensuite, dans le chapitre trois, les résultats généraux du travail fondamental de Wigner sur les représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré dans l'espace des états physiques et nous introduirons l'opérateur de spin relativiste dans le cas d'une particule massive.

Le chapitre suivant est consacré à la construction des états spinoriels. Dans le cas d'une particule massive nous introduisons ceux-ci après avoir étudié les propriétés de transformation des états propres relativistes de l'impulsion et du spin. Nous abordons ensuite le cas d'une masse nulle que nous traitons de façon analogue et nous écrivons pour terminer les conditions de jauge relatives aux états spinoriels des particules de masse nulle.

Le dernier chapitre de cette partie établit les propriétés des amplitudes spinorielles dues à l'invariance de jauge. Ces propriétés sont déterminées dans notre cas à partir des deux points de départ suivants :

a) Le travail de D. N. Williams qui a montré que le développement de Joos des amplitudes spinorielles conduit à des amplitudes invariantes débarrassées de singularités cinématiques. Ce développement est valide pourvu qu'au moins l'une des particules soit massive : ceci pouvant être déduit du travail de Hepp.

b) Les relations de jauge écrites pour les amplitudes spinorielles par Zwanziger.

La deuxième partie est constituée d'un article écrit en anglais, précédé d'une introduction en français.

Dans cet article, nous avons utilisé une méthode introduite par Cohen-Tannoudji, Morel et Navelet pour extraire explicitement les singularités cinématiques.

En effet, en se servant des résultats établis dans la première partie,nous pouvons écrire les amplitudes d'hélicité comme une combinaison linéaire des amplitudes invariantes de Joos. Les singularités des amplitudes d'hélicité seront donc les singularités des coefficients. Nous pouvons connaître ceux-ci de façon précise et, par conséquent, en déduire les singularités cinématiques des amplitudes d'hélicité.

Nous envisagerons le cas général dans le chapitre deux (une masse nulle et toutes les autres différentes) et les cas particuliers seront traités dans les appendices.

Un autre but de cet article était d'écrire les contraintes existant entre les différentes amplitudes d'hélicité pour des valeurs particulières de l'énergie totale du système, mesurée dans le centre de masse.

Ce problème est résolu dans les chapitres trois et quatre, mais en utilisant une méthode n'ayant pas de liens avec la précédente. En effet, il n'est pas possible d'inverser les relations qui nous ont permis de calculer les singularités, c'est-à-dire d'exprimer les amplitudes invariantes de Joos en fonction des amplitudes d'hélicité. Si cela était possible, on obtiendrait par le fait même les contraintes, car il faudrait que certaines combinaisons linéaires d'amplitudes d'hélicité s'annulent afin de satisfaire à l'analyticité des amplitudes de Joos.

Nous avons donc utilisé les relations entre les amplitudes d'hélicité de la voie s décrivant le processus :

$$1 + 2 \longrightarrow 3 + 4$$

et les amplitudes d'hélicité de la voie t décrivant le processus :

$$\bar{4} + 2 \longrightarrow 3 + \bar{1}$$

En effet, nous pouvons, en supposant les résultats de Bros, Epstein et Glazer valables lorsqu'une des particules est de masse nulle, utiliser un prolongement analytique de la région physique de la voie s vers la région physique de la voie t .

Ceci nous permet d'exprimer les amplitudes d'hélicité de la voie t en fonction des amplitudes d'hélicité de la voie s .

Les amplitudes d'hélicité de la voie t n'ayant pas de singularités en s ,

ceci impose à certaines combinaisons des amplitudes de la voie s de s'annuler pour des valeurs particulières de s afin de cancelier des pôles apparaissant dans les coefficients.

Ceci peut déterminer les contraintes, mais nous avons simplifié le calcul en faisant intervenir les amplitudes de transversité introduites par Kotanski. Ces amplitudes sont des combinaisons linéaires des amplitudes d'hélicité qui ont la propriété d'avoir un croisement "diagonal". On peut donc déterminer facilement les zéros de ces amplitudes qui donnent immédiatement les contraintes.

Dans une troisième partie, nous indiquerons une méthode de calcul plus directe, introduite récemment par Raynal.

Cette méthode que nous exposerons dans le premier chapitre consiste à considérer les propriétés d'analyticité des amplitudes spinorielles et à en déduire directement les propriétés d'analyticité des amplitudes d'hélicité, sans utiliser le développement de Joos des amplitudes spinorielles. Elle permet de traiter de façon plus globale le problème des singularités cinématiques. Les résultats obtenus sont, bien entendu, identiques à ceux trouvés dans la deuxième partie de notre travail, sauf pour les singularités en $\Phi(s,t) = 0$. En effet, dans ce cas, en utilisant le développement de Joos, nous avons fait implicitement l'hypothèse que le domaine d'analyticité des amplitudes spinorielles était saturé.

La méthode de Raynal n'utilise pas cette hypothèse et conduit, par conséquent, à plusieurs solutions. Mais, si l'on suppose que le domaine d'analyticité des amplitudes spinorielles est saturé, il ne reste qu'une solution qui correspond à celle que nous avons trouvée dans la deuxième partie. A titre d'exemple, nous étudierons les singularités en $s = 0$ de la réaction $\gamma\gamma \longrightarrow A\bar{A}$. Ce cas ne peut pas être étudié directement avec la méthode de Raynal car il n'existe pas de bases telles que les quadrivecteurs p_1 , p_2 , p_3 et p_4 soient tous réguliers en $s = 0$.

Mais quelques remarques, dues à H. Navelet, nous permettent de traiter ce cas. En effet, d'après les propriétés de covariance de l'amplitude spinorielle, on peut considérer celle-ci comme une fonction de deux semi-vecteurs qu'il est alors possible de rendre réguliers au voisinage de $s = 0$ par un choix particulier de la base.

Nous aborderons ensuite,dans un deuxième chapitre, le problème des contraintes qui est résolu de façon fort élégante par la méthode de Raynal.

En effet, il est possible d'inverser les expressions des amplitudes d'hélicité en fonction des amplitudes spinorielles, afin d'écrire celles-ci comme combinaisons d'amplitudes d'hélicité. Cette dernière égalité donne directement les contraintes que doivent satisfaire les amplitudes d'hélicité.

Cette façon d'obtenir les contraintes est le principal avantage de la méthode de Raynal par rapport à celle de Cohen-Tannoudji, Morel et Navelet où l'on doit utiliser le croisement.

Mais les équations ainsi obtenues ne sont pas d'une utilisation pratique. Ce dernier inconvénient a été écarté indépendamment par Stapp et par Navelet qui, en se servant des amplitudes de transversité ramènent les équations de contraintes à la forme que nous avons obtenue dans la deuxième partie de cet ouvrage.

En conclusion, nous ferons quelques remarques sur les avantages qu'il peut exister à utiliser les amplitudes d'hélicité libres de singularités cinématiques, ainsi que sur les applications qui peuvent en découler.

PREMIERE PARTIE

RAPPELS de CINEMATIQUE RELATIVISTE

PREMIER CHAPITRE

Le GROUPE de LORENTZ RESTREINT et le GROUPE de POINCARE

L'introduction de l'invariance relativiste dans les théories physiques fait appel à deux propriétés fondamentales.

La première est la suivante : considérons deux systèmes d'inertie de l'espace de Minkowski notés Σ et Σ' ainsi qu'un phénomène physique ϕ. Alors, la loi qui régit l'évolution du système ϕ est la même dans Σ et dans Σ' pourvu que les conventions utilisées soient les mêmes.

La seconde est qu'il existe un ensemble de règles (transformations de Lorentz) qui permettent de déduire, à partir de la description dans Σ d'un état physique ϕ, une description qui soit valable dans Σ' .

Ces deux résultats ayant un rôle majeur, nous allons dans ce chapitre expliciter les propriétés des transformations de Lorentz ainsi que les notations relativistes que nous utiliserons dans cet ouvrage.

(1.1) - Notations relativistes -

L'espace temps de Minkowski est l'espace vectoriel réel de dimension quatre, muni de la métrique pseudo-euclidienne (+, -, -, -). C'est-à-dire que les composantes contravariantes du tenseur métrique $g^{\mu\nu}$ sont telles

que :

$$g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$$

$$g^{\mu\nu} = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu \tag{I-1}$$

L'espace ordinaire qui est l'espace euclidien E_3 sera toujours considéré comme un sous-espace de l'espace temps de Minkowski ; en particulier la métrique de E_3 est (-, -, -) et son tenseur métrique se confond avec la partie spatiale du tenseur métrique de l'espace de Minkowski.

Un quadrivecteur x de cet espace sera caractérisé par quatre composantes contravariantes x^μ ou covariantes x_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) qui se transforment de la façon suivante lorsqu'on applique une transformation de Lorentz Λ au vecteur x :

Pour les contravariantes :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu \tag{I-2}$$

Pour les covariantes :

$$x'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \, x_\nu \tag{I-3}$$

Pour simplifier les notations, nous écrirons souvent :

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x}) \tag{I-4}$$

avec $x^0 = ct$

Nous noterons toujours Λ une transformation de Lorentz et $\mathbb{\Lambda}$ la matrice composée des éléments $\Lambda^\mu{}_\nu$ associée à cette transformation.

Les deux systèmes de composantes de ce quadrivecteur x sont reliés de la façon suivante :

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \left\{ x^0 , - \vec{x} \right\}$$
$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = \left\{ x^0 , \vec{x} \right\} \qquad \text{(I-5)}$$

Dans ces égalités, nous avons utilisé la convention d'Einstein, à savoir qu'un indice répété une fois en position covariante et une fois en position contravariante indique une sommation sur cet indice.

Ces indices sont notés par des lettres grecques (μ, ν, ρ ,...) si ce sont des indices de l'espace de Minkowski. Ils prennent dans ce cas les valeurs 0, 1, 2, 3 . Les indices latins (i, j, k) sont des indices de l'espace euclidien E_3 et prennent les valeurs 1, 2, 3 .

D'autre part, les composantes covariantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique sont définies par l'équation :

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\rho} = \delta^\nu{}_\rho \qquad (g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}) \qquad \text{(I-6)}$$

où $\delta^\nu{}_\rho$ est le symbole de Kronecker

$$\delta^\mu{}_\nu = 1 \quad \text{si} \quad \mu = \nu \qquad \delta^\mu{}_\nu = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu \qquad \text{(I-7)}$$

On peut aussi définir les composantes mixtes $g^\mu{}_\nu$ du tenseur métrique qui sont :

$$g^\mu{}_\sigma = g^{\mu\rho} g_{\rho\sigma} = \delta^\mu{}_\sigma \qquad \text{(I-8)}$$

Ces propriétés de covariance se généralisent facilement à des tenseurs de rang plus élevé.

Le produit scalaire de deux quadrivecteurs x et y est noté $x \cdot y$ et sa valeur est donnée par la forme bilinéaire symétrique :

$$x \cdot y = x_\mu g^{\mu\nu} y_\nu = x_\mu y^\mu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \qquad \text{(I-9)}$$

On définit le genre d'un quadrivecteur x par la valeur du produit scalaire $x^2 = x \cdot x$. Si x^2 est inférieur à zéro, x est dit du genre espace. Si x^2 est égal à zéro, x est dit du genre lumière. Enfin, si x^2 est plus grand que zéro, x est dit du genre temps.

Nous introduisons aussi le symbole de Levi-Civita pour l'espace de Minkowski. C'est le tenseur complètement antisymétrique $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ qui est défini de la façon suivante : $\epsilon_{0123} = +1$. De plus :

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \qquad \text{(I-10)}$$

Le symbole de Levi-Civita pour l'espace euclidien de métrique (-, -, -), sous-espace de l'espace de Minkowski est défini par :

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{0ijk} \qquad \text{(I-11)}$$

(1.2) - Le groupe de Lorentz -

Nous allons rappeler brièvement dans cette section quelques résultats sur les transformations de Lorentz homogènes [MIC. 58] .

Soient deux systèmes de références S et S' en mouvement relatif uniforme le long de l'axe x^1 et tels qu'ils coincident pour $x^0 = 0$. La transformation de Lorentz reliant les coordonnées x' et x s'écrit :

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) = x^0 \operatorname{ch} u - x^1 \operatorname{sh} u \\ x'^1 &= \gamma(-\beta x^0 + x^1) = -x^0 \operatorname{sh} u + x^1 \operatorname{ch} u \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \qquad \text{(I-12)}$$

$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ $\qquad \beta = v/c \qquad$ $\operatorname{th} u = \beta$

v est la vitesse relative des deux systèmes de référence.

Ceci est un cas particulier des transformations de Lorentz que l'on peut définir comme étant les transformations linéaires qui laissent invariante la forme quadratique x^2 .

Si nous désignons par Λ la transformation de Lorentz la plus générale agissant dans l'espace de Minkowski, Λ est une matrice $4 \otimes 4$ telle que :

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} \, x^{\nu} \qquad \text{(I-13)}$$

dont les éléments $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ sont réels. Le fait que la forme quadratique $g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$ soit invariante nous permet d'écrire :

$$g_{\nu\sigma} x^{\nu} x^{\sigma} = g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = g_{\mu\rho} \Lambda^{\mu}_{\ \nu} \Lambda^{\rho}_{\ \sigma} \, x^{\nu} x^{\sigma}$$

d'où $$g_{\nu\sigma} = g_{\mu\rho} \Lambda^{\mu}_{\ \nu} \Lambda^{\rho}_{\ \sigma} \qquad \text{(I-14}$$

En remarquant que $\Lambda^{T\,\mu}_{\ \ \nu} = \Lambda^{\nu}_{\ \mu}$, nous pouvons écrire cette dernière équation :

$$\Lambda^{T} G \Lambda = G \qquad \text{(I-15)}$$

G étant la matrice $4 \otimes 4$ associée au tenseur métrique $g_{\mu\nu}$; les éléments de la matrice G sont $G^{\mu}_{\ \nu} = g_{\mu\nu}$.

(1.3) - Le sous-groupe restreint -

Si nous prenons le déterminant des deux membres de la relation matricielle (I-15) , nous obtenons $(\det \Lambda)^2 = 1$ c'est-à-dire :

$$\det \Lambda = \pm 1 \qquad \text{(I-16)}$$

Considérons maintenant la relation (I-14) et prenons $\nu = \sigma = 0$.

On en déduit :

$$1 = g_{00} = \Lambda^{\mu}{}_{0}\, \Lambda^{\rho}{}_{0}\, g_{\mu\rho} = (\Lambda^{0}{}_{0})^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^{i}{}_{0})^2$$

d'où

$$(\Lambda^{0}{}_{0})^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^{i}{}_{0})^2 \qquad \text{(I-17)}$$

nous avons donc deux possibilités :

$$\Lambda^{0}{}_{0} \geqslant 1 \qquad \text{ou} \qquad \Lambda^{0}{}_{0} \leqslant -1$$

L'ensemble des transformations de Lorentz telles que dét $\Lambda = +1$ et $\Lambda^{0}{}_{0} \geqslant 1$ forme un sous-groupe du groupe de Lorentz qui est appelé le groupe de Lorentz restreint [STR.64] [WIT.60] .

C'est celui que nous utiliserons continuellement par la suite ; nous allons par conséquent étudier plus particulièrement ses propriétés et nous écrirons à partir de maintenant "groupe de Lorentz" pour "groupe de Lorentz restreint".

Les transformations du groupe de Lorentz peuvent se décomposer en plusieurs catégories.

1°) Les transformations qui laissent l'axe du temps invariant : ce sont les rotations ordinaires de l'espace à trois dimensions.

2°) Les transformations de Lorentz pures qui transforment un quadrivecteur a en un quadrivecteur b et laissent invariant le bi-plan orthogonal aux vecteurs a et b .

3°) Dans le cas particulier où a est le vecteur de composantes $a^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$, on appellera cette transformation un boost.

Nous venons de voir que le groupe de Lorentz contient un sous-groupe isomorphe au groupe des rotations. Ce sous-groupe est composé de toutes les matrices Λ de la forme

$$\left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right| = \Lambda(R)$$

où R est une matrice $3 \otimes 3$ telle que :

$$R R^T = R^T R = 1$$

Nous allons démontrer une propriété des transformations de Lorentz dont nous aurons besoin par la suite.

Chaque transformation de Lorentz peut être décomposée de la façon suivante :

$$\Lambda = B R \qquad \text{(I-18)}$$

où R est une rotation et B une transformation de Lorentz spéciale (c'est-à-dire un boost).

Pour démontrer cette propriété [WIT. 60] [NAI. 62] on note que la transformation Λ applique le vecteur t de composantes (1, 0, 0, 0) sur le vecteur : $(\Lambda^0{}_0 , \Lambda^1{}_0 , \Lambda^2{}_0 , \Lambda^3{}_0)$

Si $(\Lambda^1{}_0 , \Lambda^2{}_0 , \Lambda^3{}_0) = \vec{0}$ on a forcément $\Lambda^0{}_0 = 1$.
Par conséquent, l'axe du temps est conservé et Λ est déjà de la forme d'une rotation.

Si $(\Lambda^1{}_0 , \Lambda^2{}_0 , \Lambda^3{}_0)$ est différent de zéro, on peut construire un boost qui amène t = (1, 0, 0, 0) sur le quadrivecteur $(\Lambda^0{}_0, \Lambda^1{}_0, \Lambda^2{}_0, \Lambda^3{}_0)$.

Ce boost s'écrit [MIN.68] :

$$B^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} - \frac{(g^{\mu}{}_{0}\,\Lambda^{\mu}{}_{0})(g^{0}{}_{\nu}\,\Lambda^{0}{}_{\nu})}{1 + \Lambda^{0}{}_{0}} + 2\,\Lambda^{\mu}{}_{0}\,g^{0}{}_{\nu} \qquad \text{(I-19)}$$

Si nous considérons maintenant la transformation $R = B^{-1}\Lambda$ nous pouvons voir que c'est une transformation qui laisse invariant le quadri-vecteur t .

En effet :

$$R \cdot t = B^{-1} \cdot \Lambda t = B^{-1} \cdot (\Lambda^{0}{}_{0}, \Lambda^{1}{}_{0}, \Lambda^{2}{}_{0}, \Lambda^{3}{}_{0}) = t$$

Ceci d'après la façon dont nous avons construit le boost B . Du fait que R est une rotation, la propriété est démontrée.

(1.4) - Générateurs infinitésimaux -

Le groupe de Lorentz est un groupe continu à six paramètres : trois pour les transformations de Lorentz pures et trois pour les rotations. Comme dans le groupe des rotations, on peut facilement déterminer la forme des générateurs d'une transformation de Lorentz infinitésimale. Si nous écrivons cette dernière :

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon\,\Gamma^{\mu}{}_{\nu} \qquad \text{(I-20)}$$

(ϵ étant une quantité infinitésimale) nous devons imposer que :

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu} = -\Gamma^{\nu}{}_{\mu} \qquad \text{(I-21)}$$

afin que l'équation (I-14) soit satisfaite. Ceci est une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice dont les éléments sont $\delta^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon\,\Gamma^{\mu}{}_{\nu}$ corresponde

à une transformation de Lorentz. En conséquence on voit que la transformation infinitésimale inverse de $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ est la transformation $\Lambda^{\nu}_{\ \mu}$.

Considérons la forme explicite de la transformation de Lorentz (I-12) agissant le long de l'axe x^1 (c'est une transformation de Lorentz pure laissant invariant le plan x^2 , x^3).

$$\Lambda^{01}(u) = \begin{vmatrix} ch\,u & sh\,u & 0 & 0 \\ sh\,u & ch\,u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(I-22)}$$

Le générateur infinitésimal correspondant sera :

$$N^{01} = \frac{d}{du} \Lambda^{01}(u) \Big|_{u=0} \qquad \text{(I-23)}$$

sa forme explicite est donc :

$$N^{01} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(I-24)}$$

On peut calculer de la même manière les cinq autres générateurs infinitésimaux. Ceux-ci s'écrivent d'une façon générale [MES.60] :

$$(N^{\alpha\beta})^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \qquad \text{(I-25)}$$

Si l'on pose :

$$M^{\mu\nu} = -i N^{\mu\nu}$$

afin de rendre ces générateurs hermitiques, on voit que toute transformation de Lorentz infinitésimale pourra s'écrire :

$$\Lambda = I + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \qquad \text{(I-26)}$$

$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ étant une quantité infinitésimale.

Une transformation de Lorentz finie peut donc s'écrire :

$$\Lambda = \exp\left(i\,\omega_{\mu\nu}\,M^{\mu\nu}\right) \qquad \text{(I-27)}$$

On vérifie en se servant de la définition (I-25) que ces générateurs infinitésimaux satisfont les relations de commutation :

$$\left[M^{\mu\nu},\, M^{\rho\sigma}\right] = i\left(g^{\mu\rho}\,M^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma}\,M^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}\,M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}\,M^{\mu\sigma}\right) \qquad \text{(I-28)}$$

Si $D(\Lambda)$ est une représentation quelconque du groupe de Lorentz, à laquelle correspondent des générateurs infinitésimaux $\mathfrak{M}^{\mu\nu}$, ceux-ci satisferont les mêmes relations de commutation puisque celle-ci ne dépend que de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz, laquelle est indépendante de la représentation choisie.

(1.5) - Le groupe de Poincaré P -

Le groupe de Poincaré est un ensemble obtenu en ajoutant les translations de l'origine d'espace temps aux transformations de Lorentz citées précédemment. Le groupe de Lorentz sera par conséquent un sous-groupe du groupe de Poincaré.

Le changement de coordonnées correspondant aux déplacements est donné par l'équation :

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \qquad \text{(I-29)}$$

Si cette transformation sur les coordonnées est désignée par a, alors les éléments du groupe de Poincaré sont désignés par le couple $\{a, \Lambda\}$

et leur action sur les coordonnées est donnée par l'équation :

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

Le produit de deux éléments $\{a_1 , \Lambda_1\}$ et $\{a_2 , \Lambda_2\}$ du groupe de Poincaré s'obtient en appliquant successivement ces deux transformations aux coordonnées x^{μ} :

$$\begin{aligned} x''^{\mu} &= \Lambda_{2\ \nu}^{\ \mu} x'^{\nu} + a_2^{\mu} \\ &= \Lambda_{2\ \nu}^{\ \mu} (\Lambda_{1\ \rho}^{\ \nu} x^{\rho} + a_1^{\nu}) + a_2^{\mu} \\ &= \Lambda_{2\ \nu}^{\ \mu} \Lambda_{1\ \rho}^{\ \nu} x^{\rho} + \Lambda_{2\ \nu}^{\ \mu} a_1^{\nu} + a_2^{\mu} \end{aligned}$$

Cette égalité nous permet d'écrire la loi de composition :

$$\{a_2 , \Lambda_2\}\{a_1 , \Lambda_1\} = \{a_2 + \Lambda_2 a_1 , \Lambda_2 \Lambda_1\} \qquad \text{(I-30)}$$

On peut noter en particulier que les éléments du groupe de Lorentz sont de la forme $\{0 , \Lambda\}$ et que les éléments du groupe des translations sont de la forme $\{a , I\}$ et que l'on a la relation :

$$\{a , I\}\{0 , \Lambda\} = \{a , \Lambda\} \qquad \text{(I-31)}$$

Cette dernière égalité montre que l'on peut factoriser les translations et les transformations de Lorentz. Nous verrons par la suite que cette propriété simplifie l'étude des représentations du groupe de Poincaré puisqu'elle permet de traiter séparément les translations et les autres transformations.

On voit aussi que le groupe de Lorentz et le groupe des translations sont des sous-groupes du groupe de Poincaré puisque ce sont des groupes et que leurs éléments sont des éléments du groupe de Poincaré.

On peut noter en particulier que les translations forment un sous-groupe abélien invariant.

(1.6) - Générateurs infinitésimaux de P -

Nous pouvons représenter les générateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré par des matrices $5 \otimes 5$. Dans ce cas, les générateurs correspondant aux transformations de Lorentz s'écriront simplement :

$$M^{\mu\nu} = \left|\begin{array}{c|c} M^{\mu\nu} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right|$$

où $M^{\mu\nu}$ est la matrice $4 \otimes 4$ définie dans la section (1.3).

Les générateurs infinitésimaux correspondant aux translations infinitésimales le long de l'axe x^{μ} , ($\mu = 1, 2, 3, 0$) que nous noterons Q^{μ} s'écriront alors :

$$Q^{\mu} = \left|\begin{array}{c|c} 0 & t^{\mu} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right|$$

où t^{μ} est un quadrivecteur colonne dont les composantes sont telles que $(t^{\mu})_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$.

Si nous posons comme précédemment $P^{\mu} = -i\, Q^{\mu}$ nous voyons que toute translation finie $\{a , I\}$ s'écrira :

$$\{a , I\} = \exp (i\, a_{\mu} P^{\mu}) \qquad \text{(I-32)}$$

Il est maintenant possible d'écrire les relations de commutation de ces différents opérateurs en se servant des formes explicites que nous venons d'établir. On trouve que :

$$\begin{aligned}
\left[P^{\mu}, P^{\nu}\right] &= 0 \\
\left[M^{\mu\nu}, P^{\sigma}\right] &= i(g^{\mu\sigma} P^{\nu} - g^{\nu\sigma} P^{\mu}) \qquad \text{(I-33)} \\
\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\right] &= i(g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma})
\end{aligned}$$

Ces relations de commutation sont fondamentales car elles sont indépendantes de toute représentation. Chercher une représentation du groupe de Poincaré revient donc à trouver une série d'opérateurs unitaires satisfaisant ces relations, c'est-à-dire un groupe d'opérateurs ayant même algèbre de Lie.

Nous pouvons donc considérer que les générateurs P^{μ} et $M^{\rho\sigma}$ sont définis par ces relations et abandonner la représentation particulière que nous avions choisie pour établir ces relations.

Ceci termine l'étude du groupe de Poincaré. Nous allons maintenant entreprendre l'étude d'un groupe qui lui est homomorphe : le groupe de recouvrement du groupe de Poincaré. Ce dernier est, pour des raisons que nous verrons ultérieurement, le groupe couramment utilisé en physique des particules élémentaires.

DEUXIEME CHAPITRE

Le GROUPE de RECOUVREMENT du GROUPE de POINCARE

Nous allons d'abord voir dans ce chapitre qu'il existe une correspondance simple entre le groupe de Lorentz $\mathcal{L}$ et un autre groupe appelé le groupe linéaire spécial à deux dimensions SL2(C). Ce groupe est constitué de toutes les matrices $2 \otimes 2$ à éléments complexes dont le déterminant est égal à +1 . Nous verrons que ce groupe joue, en physique, un rôle bien plus fondamental que le groupe de Lorentz.

Nous examinerons ensuite le cas particulier des rotations et nous donnerons la forme explicite de leurs représentations que nous généraliserons pour le cas des transformations de Lorentz quelconques.

Nous introduirons enfin le groupe de recouvrement du groupe de Poincaré en ajoutant à SL2(C) les éléments correspondant aux translations de l'espace temps.

(2.1) - Le groupe SL2(C) -

Considérons l'ensemble des trois matrices de Pauli σ^i :

$$\sigma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{(II-1)}$$

ainsi que les trois matrices σ_i définies par l'égalité :

$$\sigma_j = g_{ji}\,\sigma^i \qquad (\sigma^i = -\sigma_i)$$

Avec l'aide des trois matrices σ^i et de la matrice unité $\mathbb{1}$ que l'on note σ^0, on peut former un quadrivecteur de composantes :

$$\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, \vec{\sigma}) \qquad \text{(II-2)}$$

De plus, en utilisant la matrice $\Gamma = i\,\sigma^2$ qui s'écrit :

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

on peut définir un autre quadrivecteur [MAC. 62] dont les composantes sont :

$$\underline{\sigma}^\mu = \Gamma\,\bar{\sigma}^\mu\,\Gamma^{-1} = (\sigma^0, -\vec{\sigma}) \qquad \text{(II-3)}$$

Soient a^μ les composantes d'un quadrivecteur arbitraire a . Nous pouvons associer à ce quadrivecteur les matrices hermitiques $2\otimes 2$ $\underline{a}$ et $\bar{a}$ définies de la façon suivante :

$$\underline{a} = g_{\mu\nu}\,a^\mu\,\sigma^\nu = \mathbb{1}\,a^0 - \vec{\sigma}\cdot\vec{a} \qquad \text{(II-4)}$$

$$\bar{a} = g_{\mu\nu}\,a^\mu\,\bar{\sigma}^\nu = \mathbb{1}\,a^0 + \vec{\sigma}\cdot\vec{a} \qquad \text{(II-5)}$$

Réciproquement, n'importe quelle matrice $2\otimes 2$ peut être mise sous la forme (II-4) et l'on peut, par conséquent, lui faire correspondre un vecteur a^μ tel que :

$$a^\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{\underline{a}\,\bar{\sigma}^\mu\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{\bar{a}\,\underline{\sigma}^\mu\right\} \qquad \text{(II-6)}$$

De plus, on voit que :

$$\text{dét}\,\underline{a} = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 = a^2 \qquad \text{(II-7)}$$

Nous pouvons associer maintenant à une quelconque matrice A unimodulaire et à coefficients complexes ($A \in SL2(C)$) une transformation qui, au vecteur a , fasse correspondre le vecteur $a' = A \cdot a$ défini de la façon suivante :

$$\underline{a'} = A \, \underline{a} \, A^{+} \qquad \text{(II-8)}$$

On peut remarquer en calculant les composantes du vecteur a'^{μ} que cette transformation induit une transformation linéaire $\Lambda(A)$ dans l'espace des vecteurs :

$$\begin{aligned} a'^{\mu} &= \frac{1}{2} \, Tr \, (\bar{\sigma}^{\mu} \, \underline{a'}) \\ &= \frac{1}{2} \, Tr \, (\bar{\sigma}^{\mu} \, A \, \underline{a} \, A^{+}) \\ &= \frac{1}{2} \, Tr \, (\bar{\sigma}^{\mu} \, A \, \underline{\sigma}_{\nu} \, a^{\nu} \, A^{+}) \\ &= \frac{1}{2} \, Tr \, (\bar{\sigma}^{\mu} \, A \, \underline{\sigma}_{\nu} \, A^{+}) \, a^{\nu} \end{aligned}$$

De plus, il est possible de vérifier que l'on a les propriétés suivantes :

$$a'^{2} = \text{dét. } \underline{a'} = \text{dét. } \underline{a} = a^{2} \qquad \text{(II-9)}$$

$$\frac{\partial a'^{o}}{\partial a^{o}} = Tr(A A^{+}) > 0 \qquad \text{(II-10)}$$

Donc, la transformation $\Lambda(A)$ telle que :

$$\Lambda(A)^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2} \, Tr \, (\bar{\sigma}^{\mu} \, A \, \underline{\sigma}_{\nu} \, A^{+}) \qquad \text{(II-11)}$$

est une transformation appartenant au groupe de Lorentz restreint puisque le produit scalaire $a_{\mu} \, a^{\mu}$ est conservé ainsi que le sens de l'axe des temps.

(2.2) - Homomorphisme de $\mathcal{L}$ et de SL2(C) -

Pour démontrer que le groupe de Lorentz et le groupe SL2(C) sont homomorphes, il nous reste à vérifier que :

$$\Lambda(A) \cdot \Lambda(B) = \Lambda(AB) \qquad \text{(II-12)}$$

Démonstration [HAL.68] :

$$\begin{aligned} \Lambda(AB)^{\mu}{}_{\nu} &= \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\bar{\sigma}^{\mu} AB \underline{\sigma}_{\nu} (AB)^{+}) \\ &= \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\bar{\sigma}^{\mu} AB \underline{\sigma}_{\nu} B^{+} A^{+}) \\ &= \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(A^{+} \bar{\sigma}^{\mu} AB \underline{\sigma}_{\nu} B^{+}) \end{aligned} \qquad \text{(II-13)}$$

$$\begin{aligned} \Lambda(A) \cdot \Lambda(B)^{\mu}{}_{\nu} &= \Lambda(A)^{\mu}{}_{\delta} \cdot \Lambda(B)^{\delta}{}_{\nu} \\ &= \frac{1}{4} \mathrm{Tr}(\bar{\sigma}^{\mu} A \underline{\sigma}_{\delta} A^{+}) \mathrm{Tr}(\bar{\sigma}^{\delta} B \underline{\sigma}_{\nu} B^{+}) \\ &= \frac{1}{4} \mathrm{Tr}(A^{+} \bar{\sigma}^{\mu} A \underline{\sigma}_{\delta}) \mathrm{Tr}(\bar{\sigma}^{\delta} B \underline{\sigma}_{\nu} B^{+}) \end{aligned} \qquad \text{(II-14)}$$

En se rappelant que :

$$\mathrm{Tr}(G \underline{\sigma}_{\delta}) \mathrm{Tr}(\bar{\sigma}^{\delta} H) = \mathrm{Tr}(G H)$$

on voit bien que la propriété (II-12) est vérifiée à cause des égalités des quantités (II-13) et (II-14) . Et nous pouvons conclure que nous avons un homomorphisme du groupe SL2(C) sur le groupe de Lorentz.

On peut voir directement sur la définition (II-11) que $\Lambda(A)$ est quadratique par rapport aux éléments de A et que, par conséquent, la transformation $\Lambda(-A)$ est identique à la transformation $\Lambda(A)$.

Pour voir que celle-là est unique, il est utile de déterminer quels sont les éléments B de SL2(C) qui correspondent à la transformation unité du groupe de Lorentz.

Ces éléments vérifient l'identité :

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\,(\bar{\sigma}^{\mu} B \sigma_{\nu} B^{+})$$

à partir de laquelle on peut vérifier que $B = \pm I$.

Considérons maintenant la matrice A de SL2(C) et son inverse A^{-1}, auxquelles sont attachées les transformations de Lorentz $\Lambda(A)$ et $\Lambda(A^{-1})$:

$$\Lambda(A) \cdot \Lambda(A^{-1}) = \Lambda(A\,A^{-1}) = \Lambda(I) = I$$

$$\text{d'où} \quad \Lambda(A^{-1}) = \Lambda^{-1}(A) \qquad \text{(II-15)}$$

Supposons maintenant que $\Lambda(A) = \Lambda(B)$

$$\Lambda(AB^{-1}) = \Lambda(A)\Lambda(B^{-1}) = \Lambda(A)\Lambda^{-1}(B) = \Lambda(A)\Lambda^{-1}(A) = I$$

donc, d'après le résultat précédent :

$$AB^{-1} = \pm I \qquad \text{d'où} \qquad B = \pm A$$

La conclusion est qu'à chaque matrice $\pm A$ de SL2(C) correspond une transformation de Lorentz réelle $\Lambda(A)$ et une seule.

Pour compléter l'étude de l'homomorphisme entre le groupe SL2(C) et le groupe de Lorentz, il faut démontrer que si l'on se donne une transformation Λ appartenant au groupe de Lorentz, il existe un élément de SL2(C) tel que

$$\Lambda(A) = \Lambda$$

Ceci se montre en inversant les formules (II-11) ; on obtient alors [MAC. 62] :

$$\pm A = \frac{\mathrm{Tr}(\Lambda)\mathbb{1} + (\Lambda^{ok} - \Lambda^{ko} - i\Sigma^{ijk}\Lambda_{ij})\sigma_k}{\left\{4 + (\mathrm{Tr}\,\Lambda)^2 - \mathrm{Tr}(\Lambda\Lambda) + i\Sigma^{\mu\nu k\lambda}\Lambda_{\mu\nu}\Lambda_{k\lambda}\right\}} \qquad \text{(II-16)}$$

(2.3) - Représentations de SU(2) -

Les rotations forment un sous-groupe du groupe de Poincaré; il va donc leur correspondre un sous-groupe de SL2(C), soit SU(2) . Ce sous-groupe est constitué des matrices de SL2(C) qui sont unitaires et unimodulaires et nous allons étudier en détail leurs représentations.

Considérons une matrice de SU(2) dont la forme explicite est :

$$U = \begin{vmatrix} w & z \\ -z^* & w^* \end{vmatrix}$$

où w et z sont tels que $ww^* + zz^* = 1$ du fait que la matrice est unitaire et unimodulaire. Cette matrice opère sur des vecteurs à deux composantes complexes que nous noterons (a' , b'). Par une transformation de SU(2) , le vecteur (a' ,b') se transforme en un vecteur (a,b) suivant la formule :

$$\begin{aligned} a &= wa' + zb' \\ b &= -z^*a' + w^*b' \end{aligned} \qquad \text{(II-17)}$$

Considérons maintenant l'objet $Z^J(a,b)$ comportant $2J + 1$ composantes $Z^{J,m}(a,b)$ définies par l'équation [BAR.62] :

$$Z^{J,m}(a,b) = \frac{a^{J+m}\, b^{J-m}}{\left[(J+m)!\,(J-m)!\right]^{1/2}} \qquad \text{(II-18)}$$

$$-J \leqslant m \leqslant J$$

Les composantes $Z^{J,m}(a,b)$ sont des monômes homogènes et de degré $2J$ en a et b . Il est possible de trouver une matrice $D^J(U)$ de dimension $2J + 1$ telle que :

$$Z^{J,m}(a,b) = D^J(U)^m{}_{m'}\, Z^{J,m'}(a',b') \qquad \text{(II-19)}$$

Le vecteur $Z^{J,m}(a,b)$ est défini en substituant l'expression (II-17) dans la définition de Z . Une fois cette opération effectuée et le résultat développé suivant la formule du binôme, on obtient :

$$\left[(J+m)!\,(J-m)!\right]^{1/2} Z^{J,m}(a,b) =$$

$$= a^{J+m} b^{J-m} = (wa' + zb')^{J+m} (-z^*a' + w^*b')^{J-m}$$

$$= \sum \binom{J+m}{q} \binom{J-m}{m'-m+q} w^{J+m-q} z^{q} (-z^*)^{m'-m+q} (w^*)^{J-m'-q}$$

$$\otimes\ a'^{J+m'} b'^{J-m'}$$

Dans cette formule, les sommes sont effectuées sur tous les termes pour lesquels la factorielle a un sens. A partir de cette égalité, on déduit immédiatement les éléments $D^J(U)^m{}_{m'}$ qui sont :

$$D^J(U)^m{}_{m'} = \sum_q \frac{\left[(J+m)!\,(J-m)!\,(J+m')(J-m')\right]^{1/2}}{(J+m-q)!\ q!\ (m'-m+q)!\,(J-m'-q)!} \otimes$$

$$\otimes\ w^{J+m-q} z^{q} (-z^*)^{m'-m+q} (w^*)^{J-m'-q} \qquad \text{(II-20)}$$

A partir de cette expression, il est facile (bien qu'un peu long) de démontrer que :

$$D^J(U)^m{}_{m'}\ D^J(U')^{m'}{}_{m''} = D^J(UU')^m{}_{m''} \qquad \text{(II-21)}$$

ce qui prouve que les matrices $D^J(U)$ sont bien des représentations de SU(2).

Nous allons voir que les matrices $D^J(U)$ sont unitaires. Pour cela supposons que :

$$D^J(U^+) = D^{J+}(U) \qquad \text{(II-22)}$$

nous pouvons alors écrire :

$$D^J(U)\,D^{+J}(U) = D^J(U)\,D^J(U^+) = D^J(UU^+) = D^J(I) = I$$

ce qui montre que $D^J(U)$ est unitaire. Il nous reste donc à vérifier la relation (II-22).

Les matrices $D^J(U^+)^s_t$ et $D^{J+}(U)^s_t$ s'écrivent :

$$D^J(U)^s_t = \sum_q \frac{\left[(J-s)!\,(J+s)!\,(J-t)!\,(J+t)!\right]^{1/2}}{(J+s-q)!\,q!\,(t-s+q)!\,(J-t-q)!} \otimes$$

$$\otimes\ (w^*)^{J+s-q}\,(z^*)^q\,(-z)^{t-s+q}\,(w)^{J-t-q}$$

$$D^{+J}(U)^s_t = \sum_r \frac{\left[(J-s)!\,(J+s)!\,(J-t)!\,(J+t)!\right]^{1/2}}{(J+t-r)!\,r!\,(s-t+r)!\,(J-s-r)!} \otimes$$

$$\otimes\ (w^*)^{J+t-r}\,(z^*)^r\,(-t)^{s-t+r}\,w^{J-s-r}$$

Si, dans cette dernière expression, nous posons $r = t-s+q$ nous voyons que ces deux expressions sont égales, d'où la propriété énoncée.

Considérons la matrice U . Elle correspond à une rotation R paramétrée par les angles d'Euler α , β , γ.

Cette rotation peut s'écrire :

$$R_{12}(\gamma) \cdot R_{23}(\beta) \cdot R_{12}(\alpha)$$

Soit la rotation $R_{12}(\alpha)$; on peut écrire séparément la façon dont elle transforme les trois axes. Ainsi pour Ox on obtient :

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha - i\sin\alpha \\ \cos\alpha + i\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & z \\ -z^* & w^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w^* & -z \\ z^* & w \end{vmatrix}$$

Des relations analogues écrites pour Oy et Oz nous permettent de déterminer w et z . On trouve :

$$z = 0 \qquad w = \exp\left(-\frac{1}{2} i \alpha\right)$$

Le même procédé, utilisé pour déterminer la matrice $2 \otimes 2$ représentant une rotation autour de Ox , nous donne :

$$z = -i \sin \beta/2 \qquad w = \cos \beta/2$$

Par conséquent, la matrice $U(\alpha, \beta, \gamma)$ s'écrit [KAH.60] :

$$U = \begin{vmatrix} w & z \\ -z^* & w^* \end{vmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} w &= \exp\left(-\frac{1}{2} i (\alpha + \gamma)\right) \cos \beta/2 \\ z &= -i \exp\left(-\frac{1}{2} (\alpha - \gamma)\right) \sin \beta/2 \end{aligned} \qquad \text{(II-23)}$$

Alors les matrices $D^J(U)$ peuvent être notées $D^J(\alpha, \beta, \gamma)$, et sont nommées matrices de rotation. Elles peuvent s'écrire :

$$D^J(\alpha, \beta, \gamma)^m{}_{m'} = e^{-im\alpha} d^J(\beta)^m{}_{m'} e^{-im'\gamma} \qquad \text{(II-24)}$$

$$d^J(\beta)^m{}_{m'} = \sum_r (-1)^r \frac{\left[(J+m)!\,(J-m)!\,(J+m')!\,(J-m')!\right]^{1/2}}{(J-r+m')!\,(J-r-m')!\,(r+m-m')!\,r!} \otimes$$

$$\otimes \cos\frac{\beta}{2}^{2J-2r+m'-m} \left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2r+m-m'} \qquad \text{(II-25)}$$

Les matrices de rotation $d^J(\beta)^m{}_{m'}$ ont un certain nombre de propriétés de symétries faciles à vérifier sur la formule (II-25) [WIG.59] [BER.65] :

$$d^J(-\beta)^m{}_{m'} = d^J(\beta)^m{}_{m'} \qquad \text{(II-26)}$$

$$d^J(\pi+\beta)^m{}_{m'} = (-1)^{J-m} d^J(\beta)^{-m}{}_{m'} = (-1)^{J+m'} d^J(\beta)^m{}_{-m'} \qquad \text{(II-27)}$$

$$d^J(\pi-\beta)^m{}_{m'} = (-1)^{J-m}\, d^J(\beta)^{m'}{}_{-m} = (-1)^{J+m}\, d^J(\beta)^{-m'}{}_{m} \qquad \text{(II-28)}$$

$$d^J(\beta)^m{}_{m'} = (-1)^{m-m'}\, d^J(\beta)^{-m}{}_{-m'} \qquad \text{(II-29)}$$

$$d^J(\beta)^m{}_{m'} = (-1)^{m-m'}\, d^J(\beta)^{m'}{}_{m} \qquad \text{(II-30)}$$

$$d^J(\beta)^m{}_{m'} = d^J(\beta)^{-m'}{}_{-m} \qquad \text{(II-31)}$$

La formule (II-20) a été établie pour des matrices unitaires. Mais si la matrice U de SU(2) est remplacée par une matrice A de SL2(C) , toutes les propriétés énoncées vont rester validées, excepté l'unitarité de D(A) puisque A lui-même n'est pas unitaire.

L'extension de la définition (II-20) au cas des matrices non unitaires définit une représentation particulière de SL2(C) qui est appelée la représentation (J, 0).

On peut établir les relations suivantes :

$$D^J(A^*)^m{}_{m'} = D^{*J}(A)^m{}_{m'} \qquad \text{(II-32)}$$

$$D^J(A^T)^m{}_{m'} = D^J(A)^{m'}{}_{m} \qquad \text{(II-33)}$$

$$D^J(\lambda I)^m{}_{m'} = \delta_{m,m'}\, \lambda^{2J} \qquad \text{(II-34)}$$

On peut définir une autre représentation qui est la représentation (0, J) , construite à l'aide des matrices $D^J(A^{+-1})$. Cette représentation n'est pas équivalente à la précedente.

(2.4) - Le groupe de recouvrement de P -

Nous venons de voir qu'il existait un homomorphisme du groupe SL2(C) sur le groupe de Lorentz.

Les translations peuvent être combinées avec les éléments de SL2(C) pour donner un nouveau groupe appelé le groupe de recouvrement du groupe de Poincaré.

Une transformation appartenant au groupe de recouvrement sera donc la composition d'une transformation de Lorentz A et d'une translation $\underline{a}$. Elle sera représentée par la couple $\left\{ \underline{a} , A \right\}$.

La loi de composition pour le groupe de recouvrement est donnée par :

$$\left\{ \underline{a}_1 , A_1 \right\} \left\{ \underline{a}_2 , A_2 \right\} = \left\{ \underline{a}_1 + A_1 \ \underline{a}_2 \ A_1^{+} , A_1 A_2 \right\}$$

Il est facile de vérifier que l'ensemble des éléments $\left\{ \underline{a} , A \right\}$ munis de cette loi de composition forment un groupe homomorphe au groupe de Poincaré avec la correspondance :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \underline{a} , A \right\} \\ \left\{ \underline{a} , -A \right\} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ a , \Lambda(A) \right\}$$

Les générateurs infinitésimaux P^{μ} et $M^{\nu\rho}$ du groupe de recouvrement satisfont évidemment les mêmes relations de commutation que celles des générateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré.

Jusqu'à présent, le groupe de recouvrement $\overline{P}$ apparait comme un outil technique. Mais il existe une différence fondamentale entre $\overline{P}$ et P. En effet, les représentations du groupe de Poincaré sont toutes caractérisées

par des entiers, alors que celles du groupe de recouvrement peuvent être aussi caractérisées par des nombres demi-entiers.

L'utilisation du groupe de recouvrement va donc permettre de comprendre l'existence des particules de spin demi-entier qui se rencontrent dans la nature.

Cette dernière propriété impose donc le choix du groupe de recouvrement comme étant le groupe fondamental de la mécanique quantique relativiste.

TROISIEME CHAPITRE

REPRESENTATION des ETATS PHYSIQUES

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié quelques unes des propriétés algébriques des transformations de coordonnées provenant des hypothèses relativistes.

Mais, d'un autre côté, nous savons que la nature est décrite par des vecteurs dans un espace de Hilbert. Nous allons voir que les exigences de la théorie de la relativité imposent, dans ces espaces de Hilbert, l'existence d'opérateurs qui sont reliés aux transformations de coordonnées.

Nous allons, dans ce chapitre, donner les propriétés générales de ces opérateurs dues à l'invariance relativiste.

(3.1) - Propriétés générales des états -

Soient deux observateurs situés dans deux systèmes d'inertie différents et qui étudient le même état physique P (resp. Q). Ils utilisent chacun les vecteurs d'un espace de Hilbert soit $|\varphi P\rangle$ (resp. $|\varphi Q\rangle$) pour le premier et $|\psi P\rangle$ (resp. $|\psi Q\rangle$) pour le deuxième.

Or, les quantités mesurables, en théorie quantique, sont les probabilités de transition. Celles-ci s'expriment en fonction des carrés des produits

scalaires entre états. Puisque ces quantités sont invariantes, il s'ensuit que :

$$|\langle \varphi^P | \varphi^Q \rangle|^2 = |\langle \psi^P | \psi^Q \rangle|^2 \qquad \text{(III-1)}$$

Cette égalité est la conséquence du fait que les lois de la nature doivent être invariantes pour tout changement de repère d'inertie et du fait qu'un produit scalaire est une quantité invariante.

Nous voyons par conséquent que si l'on remplace l'état $|\varphi P\rangle$ par l'état $\exp(i\alpha)|\varphi P\rangle$, l'égalité (III-1) n'est pas modifiée.

Il n'est donc pas possible de discerner les états $|\varphi P\rangle$ et $\exp(i\alpha)|\varphi P\rangle$, et l'on est obligé d'introduire la notion de rayon .

L'ensemble des vecteurs $\exp(i\alpha)|\varphi P\rangle$ représentant le même état physique P est appelé un rayon de l'espace de Hilbert et c'est seulement ce dernier être mathématique qui possède une signification physique [BAR. 64].

La correspondance entre rayons de l'espace de Hilbert est réalisée par une transformation que nous allons préciser par la suite.

(3.2) - Théorème de Wigner -

Le résultat fondamental sur lequel est basée toute la mécanique quantique relativiste est le théorème de Wigner [WIG. 39]. Celui-ci prouve que la loi de transformation qui permet de faire correspondre deux rayons satisfaisant l'équation (III-1) doit être représentée par un opérateur soit unitaire, soit antiunitaire.

Plus précisément, si les états d'un système physique P sont décrits par deux observateurs dont les systèmes de coordonnées sont reliés par une

transformation de Poincaré $\{a , \Lambda\}$, de telle sorte que les rayons qui décrivent le système P satisfassent l'équation (III-1) , il existe alors un opérateur unitaire ou antiunitaire qui, à chaque vecteur $|\varphi P\rangle$ associe un vecteur $|\psi P\rangle$ tel que :

$$|\psi P\rangle = U(a, \Lambda)\,|\varphi P\rangle$$

où $U(a, \Lambda)$ est une représentation du groupe de Poincaré définie à une phase près. (Cette phase ne dépendant pas de l'état physique P).

Si nous considérons deux transformations du groupe de Poincaré $\{a_1 , \Lambda_1\}$ et $\{a_2 , \Lambda_2\}$, la transformation produit $\{a_2 , \Lambda_2\} \cdot \{a_1 , \Lambda_1\}$ est une transformation du groupe de Poincaré qui induit une correspondance entre les rayons des espaces de Hilbert des états. Les opérateurs $U(a_1 , \Lambda_1)$, $U(a_2 , \Lambda_2)$ et $U(a_2 + \Lambda_2 a_1 , \Lambda_2 \Lambda_1)$ vérifient alors la relation suivante :

$$U(a_2 , \Lambda_2)\, U(a_1 , \Lambda_1) = \exp(i\, w(a_1 , \Lambda_1 ; a_2 \Lambda_2))\, U(a_2 + \Lambda_2 a_1 , \Lambda_2 \Lambda_1) \qquad \text{(III-2)}$$

On appelle représentation unitaire à une phase près, ou représentation projective du groupe P un ensemble d'opérateurs unitaires vérifiant une telle relation [MAK. 55] .

Les représentations projectives des groupes de Lie ont été étudiées en détail par Bargmann [BAR. 64]. Il a notamment montré que les représentations projectives du groupe de Poincaré sont les représentations vraies (c'est-à-dire les représentations telles que $w = 1$) du groupe de recouvrement.

Ceci nous permettra d'ignorer par la suite la présence des systèmes de facteurs w , à condition de considérer le groupe de recouvrement et non le

groupe de Poincaré, comme le véritable groupe de symétrie.

Nous allons maintenant appliquer les résultats qui précèdent à l'étude de l'invariance relativiste. Si nous nous rappelons la loi de composition soit :

$$\{a , \Lambda\} = \{a , \mathbb{1}\} \{0 , \Lambda\}$$

nous pouvons traduire cette relation, pour la représentation choisie, par l'égalité :

$$U(a , \Lambda) = U(a , 1) U(0 , \Lambda) = U(a) U(\Lambda) \qquad \text{(III-3)}$$

Les représentations du groupe de recouvrement peuvent donc être factorisées sous la forme :

$$U(a , \Lambda) = U(a) U(\Lambda)$$

où nous avons posé :

$$U(a , 1) = U(a) \qquad \text{(III-4)}$$

$$U(0 , \Lambda) = U(\Lambda) \qquad \text{(III-5)}$$

Nous pouvons donc étudier séparément les représentations du sous-groupe des translations et celles du sous-groupe homogène $\overline{SL2(C)}$.

(3.3) - Propriétés d'invariance de P^2 -

Les translations commutant entre elles, on peut écrire :

$$\{a\} \{a'\} = \{a'\} \{a\} = \{a + a'\} \qquad \text{(III-6)}$$

Les opérateurs U(a) et U(a') satisfont donc les relations de commutation :

$$\left[U(a) , U(a') \right] = 0 \qquad \text{(III-7)}$$

Supposons qu'il existe des états $|\psi\rangle$ qui soient états propres

simultanés de tous les opérateurs de translation U(a) avec les valeurs propres $\alpha(a)$:

$$U(a) \; |\psi\rangle = \alpha(a) \; |\psi\rangle \qquad \text{(III-8)}$$

La loi de groupe :

$$U(a)\, U(a') = U(a + a')$$

implique la condition :

$$\alpha(a)\alpha(a') = \alpha(a + a')$$

dont la solution est :

$$\alpha(a) = \exp(ip \cdot a)$$

où p est un quadrivecteur arbitraire.

Les états $|\psi\rangle$ peuvent être caractérisés par l'ensemble des valeurs propres des opérateurs U(a) c'est-à-dire par le quadrivecteur p . Nous poserons donc :

$$|\psi\rangle = |p, n\rangle$$

où les nombres quantiques n caractérisent la dégénérescence de l'état $|p\rangle$; nous avons :

$$U(a) \; |p, n\rangle = \exp(ip \cdot a) \; |p, n\rangle \qquad \text{(III-9)}$$

Les générateurs des translations sont représentés par les quantités :

$$P^\mu = -i \frac{\partial}{\partial a_\mu} \; U(a, 1) \Big|_{a = 0}$$

$$= -i \frac{\partial}{\partial a_\mu} \exp(ip \cdot a) \Big|_{a = 0}$$

d'où :

$$P^\mu = p^\mu \qquad \text{(III-10)}$$

On a donc :

$$P^\mu P_\mu \; |p, n\rangle = p^\mu p_\mu |p, n\rangle = m^2 |p, n\rangle \qquad \text{(III-11)}$$

L'opérateur P^2 est un multiple de l'unité sur tout l'espace des vecteurs $|p, n\rangle$. La valeur propre m^2 caractérise la représentation considérée. Dans la suite nous considèrerons des états $|p, n\rangle$ dont l'énergie impulsion a une valeur bien déterminée p.

(3.4) - Propriété d'invariance de W^2 -

Nous savons, d'après l'expérience, que les états représentant une particule sont aussi caractérisés par le spin et la projection de ce spin sur un axe arbitraire. Nous discuterons de ces propriétés au chapitre suivant et nous nous bornerons, pour le moment, à introduire l'opérateur W qui commute avec P et tel que W^2 soit une quantité invariante.

Considérons pour cela les transformations appartenant au sous-groupe qui laisse les valeurs propres de P^μ invariantes [MOU.66]. Ces transformations sont dites appartenir au petit groupe de p et la propriété énoncée se traduit par l'égalité :

$$\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu = p^\mu \qquad \text{(III-12)}$$

Si l'on considère les transformations infinitésimales de la forme :

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \eta\, a^\mu{}_\nu \qquad \text{(III-13)}$$

η étant une quantité infinitésimale, la condition (III-12) impose que :

$$a^\mu{}_\nu p^\nu = 0 \qquad \text{(III-14)}$$

On peut vérifier que la matrice la plus générale possédant la propriété (III-14) peut s'écrire :

$$a^\mu{}_\nu = \epsilon^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\, p^\rho\, n^\sigma \qquad \text{(III-15)}$$

où n^σ est un quadrivecteur arbitraire et où $\epsilon^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ est le symbole de Levi-Civita défini au premier chapitre (équation (I-10)).

Considérons maintenant la transformation unitaire infinitésimale Λ_η correspondant à une transformation de Lorentz appartenant au petit groupe de p. Cette transformation infinitésimale s'écrit :

$$\Lambda_\eta = 1 + \frac{1}{2} i \eta \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\rho n^\sigma \mathfrak{M}^{\mu\nu} \qquad \text{(III-16)}$$

avec :

$$(\mathfrak{M}^{\mu\nu})^{k\lambda} = i (g^{\mu k} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu k})$$

nous pouvons encore écrire (III-16) :

$$\Lambda_\eta = 1 - i \eta n^\sigma \mathcal{W}_\sigma \qquad \text{(III-17)}$$

en posant :

$$\mathcal{W}_\sigma = - \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathfrak{M}^{\mu\nu} \mathcal{P}^\rho \qquad \text{(III-18)}$$

Si nous considérons maintenant une représentation unitaire $M^{\mu\nu}$ et P^ρ des opérateurs $\mathfrak{M}^{\mu\nu}$ et $\mathcal{P}^\rho$, il lui correspondra une représentation $U(\Lambda_\eta)$ de la transformation infinitésimale Λ_η du petit groupe et l'on aura de la même façon :

$$U(\Lambda_\eta) = 1 - i \eta n^\sigma W_\sigma$$

ce qui donne la forme suivante pour la représentation d'une transformation finie du petit groupe :

$$U(\Lambda) \mid p, \alpha \rangle = \exp(-i n \cdot W) \mid p, \alpha \rangle \qquad \text{(III-19)}$$

Dans la relation (III-18) nous avons remplacé le vecteur p^σ par l'opérateur P^σ, car la transformation Λ appartenant au petit groupe agit seulement sur des états qui sont valeurs propres de l'opérateur P.

Nous allons maintenant établir quelques propriétés de l'opérateur W :

$$W_\sigma \; P^\sigma = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \; M^{\mu\nu} \, P^\rho \, P^\sigma$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\rho>\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \; M^{\mu\nu} \, (P^\rho \, P^\sigma - P^\sigma \, P^\rho)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\rho>\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \; M^{\mu\nu} \left[P^\rho , P^\sigma \right] = 0$$

d'où :

$$W_\sigma \; P^\sigma = 0 \qquad \text{(III-20)}$$

On démontre de la même façon, en se servant des relations de commutation (I-33) , que les opérateurs W et P commutent :

$$\left[W_\sigma , P^\mu \right] = 0 \qquad \text{(III-21)}$$

Il s'ensuit de la définition (III-18) que W_σ est un quadrivecteur ; il doit donc avoir, avec $M^{\mu\nu}$, les mêmes relations de commutation que P^σ , à savoir :

$$\left[M^{\mu\nu} , W^\sigma \right] = i \, (W^\mu \, g^{\nu\sigma} - W^\nu \, g^{\mu\sigma}) \qquad \text{(III-22)}$$

relations que l'on peut démontrer directement en se servant des égalités (I-33) et (III-18) . En combinant ces dernières égalités, on peut aussi prouver que :

$$\left[W_\lambda , W_\sigma \right] = i \, \epsilon_{\lambda\sigma\mu\nu} \; W^\mu \, P^\nu \qquad \text{(III-23)}$$

Nous pouvons remarquer que $W_\sigma \; W^\sigma$ commute avec tous les générateurs $M^{\mu\nu}$ d'après la relation (III-22) ainsi qu'avec les opérateurs P^μ d'après la relation (III-21).

On peut donc conclure que les opérateurs P et W commutent. Ils admettent donc une décomposition spectrale commune et, par conséquent,

les valeurs propres des opérateurs P^2 et W^2 peuvent être utilisées pour caractériser les représentations des états.

En conclusion, P étant pris diagonal avec la valeur propre p telle que $p^2 = m^2$, m^2 fixé $\neq 0$, puisque W commute avec P (équation (III-21)) , $W \mid p, \alpha \rangle$ est encore un vecteur propre de P correspondant à la valeur propre p :

$$P^\lambda \, W \mid p, \alpha \rangle = W \, P^\lambda \mid p, \alpha \rangle = p^\lambda \, w \mid p, \alpha \rangle \qquad \text{(III-24)}$$

On a de plus $W \cdot P = 0$ de telle sorte que W peut être décomposé sur une base de vecteurs linéairement indépendants et orthogonaux à P .

QUATRIEME CHAPITRE

ETATS SPINORIELS d'une PARTICULE

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les propriétés générales que doivent satisfaire les états physiques. Mais, jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse sur les systèmes d'inertie utilisés, ni sur la façon particulière dont était décrit l'état.

Or, il existe plusieurs choix possibles qui conduisent à des états particuliers parmi lesquels nous distinguerons les états spinoriels et les états d'hélicité.

Nous allons introduire ces différents états en considérant le cas d'une ou deux particules massives ou de masse nulle.

(4.1) - Définition des tétrades -

Dans le cas d'une particule massive, on peut attacher au quadrivecteur $n^{(0)}(p) = p/m$ trois quadrivecteurs du genre espace que nous noterons $n^{(i)}(p)$.

Ces quadrivecteurs sont choisis de façon à former une base de l'espace de Minkowski, que nous appellerons tétrade et noterons $\{p\}$ [BOU. 58]. Ils vérifient donc les relations suivantes :

$$g^{\mu\nu}\, n^{(\alpha)}{}_{\mu}(p)\, n^{(\beta)}{}_{\nu}(p) = n^{(\alpha)}{}_{\mu}(p)\, n^{(\beta)\mu}(p) = g^{\alpha\beta} \qquad \text{(IV-1)}$$

$$g_{\alpha\beta}\, n^{(\alpha)}{}_{\mu}(p)\, n^{(\beta)}{}_{\nu}(p) = g_{\mu\nu} \qquad \text{(IV-2)}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, n^{(\alpha)}{}_{\mu}(p)\, n^{(\beta)}{}_{\nu}(p)\, n^{(\gamma)}{}_{\rho}(p)\, n^{(\delta)}{}_{\sigma}(p) = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad \text{(IV-3)}$$

le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ permettant évidemment d'abaisser les indices entre parenthèses :

$$g_{\alpha\beta}\, n^{(\alpha)}{}_{\mu}(p) = n_{(\beta)\mu}(p) \qquad \text{(IV-4)}$$

Nous appellerons enfin tétrade de référence, la tétrade $\{t\}$ correspondant au système au repos de la particule. Sa forme explicite est :

$$\begin{aligned} t = n^{(0)}{}_{\mu}(t) &= (1,0,0,0) \\ n^{(1)}{}_{\mu}(t) &= (0,1,0,0) \\ n^{(2)}{}_{\mu}(t) &= (0,0,1,0) \\ n^{(3)}{}_{\mu}(t) &= (0,0,0,1) \end{aligned} \qquad \text{(IV-5)}$$

Nous pouvons maintenant poser :

$$W^{(i)}(p) = W(p) \cdot n^{(i)}(p) \qquad \text{(IV-6)}$$

et écrire par conséquent :

$$W(p) = -W^{(i)}(p)\, n_{(i)}(p) \qquad \text{(IV-7)}$$

Ces égalités se déduisent de l'équation (III-20) qui montre que $W(p)$ est orthogonal au vecteur p .

Si nous posons :

$$S^{(i)}(p) = -W^{(i)}(p)/m \qquad \text{(IV-8)}$$

on peut, d'après (III-23) , écrire les relations de commutation que satisfont les opérateurs $S^{(i)}(p)$; à savoir :

$$\left[S^{(i)}(p)\,,\, S^{(j)}(p)\right] = i\, \epsilon^{ijk}\, S^{(k)}(p) \qquad \text{(IV-9)}$$

où ϵ_{ijk} est le tenseur de Levi-Civita que nous avons défini par l'équation (I-11).

Si nous nous plaçons maintenant dans la tétrade $\{t\}$, on voit, en se servant de l'équation (III-18), que les opérateurs $S^{(i)}(t)$ s'écrivent :

$$S^{(i)}(t) = -\frac{1}{2}\,\epsilon^{i}_{jk}\,M^{jk} \qquad \text{(IV-10)}$$

D'après l'équation (IV-9) les opérateurs $S^{(i)}(t)$ satisfont les relations de commutation des composantes du moment angulaire. Ce sont les générateurs du sous-groupe SU(2) qui laissent p invariant. Dans le système où la particule est au repos, les opérateurs $S^{(i)}(t)$ sont les opérateurs de spin habituels comme le montre l'équation (IV-10).

(4.2) - Définition des vecteurs de base -

Si nous nous plaçons dans la tétrade $\{t\}$, nous savons qu'il est possible de définir un système de vecteurs propres $|t, s, m\rangle$ possédant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} S^2(t)\,|t,s,m\rangle &= S(S+1)\,|t,s,m\rangle \\ S^{(3)}(t)\,|t,s,m\rangle &= m\,|t,s,m\rangle \qquad \text{(IV-11)} \\ \left[S^{(1)}(t) \pm i\,S^{(2)}(t)\right]|t,s,m\rangle &= \sqrt{S(S+1) - m(m\pm 1)}\;|t,s,m\pm 1\rangle \end{aligned}$$

Si l'on applique au système physique une rotation R, ces vecteurs se transforment suivant la loi :

$$U(R)\,|t,s,m\rangle = |t,s,m'\rangle\;D^{s}(R)^{m'}{}_{m} \qquad \text{(IV-12)}$$

Nous pouvons maintenant considérer une tétrade quelconque $\{p\}$ et désigner par $\mathcal{L}(p)$ la transformation de SL2(C) amenant la tétrade $\{t\}$ sur la tétrade $\{p\}$ [MOU. 66].

Sous l'effet de cette transformation, les vecteurs de base

$$| t, s, m \rangle$$

sont transformés en des vecteurs :

$$U(\mathcal{L}(p)) | t, s, m \rangle = | p, \mathcal{L}(p), s, m \rangle \qquad \text{(IV-13)}$$

et, à partir des opérateurs $S^{(i)}(t)$ on obtient les opérateurs $S^{(i)}(p)$:

$$S^{(i)}(p) = U(\mathcal{L}(p))\, S^{(i)}(t)\, U^{-1}(\mathcal{L}(p))$$

Les égalités (IV-8) écrites dans la tétrade $\{t\}$ s'écrivent alors dans la tétrade $\{p\}$:

$$\begin{aligned} S^2(p) | p, \mathcal{L}(p), s, m \rangle &= S(S+1) | p, \mathcal{L}(p), s, m \rangle \\ S^{(3)}(p) | p, \mathcal{L}(p), s, m \rangle &= m | p, \mathcal{L}(p), s, m \rangle \qquad \text{(IV-14)} \\ \left[S^{(1)}(p) \pm i S^{(2)}(p) \right] | p, \mathcal{L}(p), s, m \rangle &= \sqrt{S(S+1) + m(m \pm 1)}\, | p, \mathcal{L}(p), s, m \pm 1 \rangle \end{aligned}$$

Comme les opérateurs $S^{(i)}(p)$ attachés à la tétrade $\{p\}$ sont une extension relativiste des opérateurs $S^{(i)}(t)$, ils vont avoir la même signification que ceux-ci ; c'est-à-dire qu'ils sont la généralisation relativiste des opérateurs de spin.

Le choix de $\mathcal{L}(p)$ qui est arbitraire, marque d'abord de façon précise sur quel quadrivecteur $n^{(3)}(p)$ orthogonal à p, l'opérateur de spin W/m est mesuré et comment la phase de l'état correspondant est choisie.

Nous pouvons maintenant à partir des relations établies trouver l'action d'une transformation $U(a, \Lambda)$ quelconque sur le vecteur :

$$| p, \mathcal{L}(p), s, m \rangle$$

(nous noterons désormais $U(\Lambda)$ la représentation qui correspond à la transformation de Lorentz Λ, étant bien entendu que Λ est une matrice apparte-

nant au groupe SL2(C)):

$$U(a,\Lambda)\,|p,\mathcal{L}(p),s,m\rangle = U(a)\,U(\Lambda)\,|p,\mathcal{L}(p),s,m\rangle$$

$$= U(a)\,U(\mathcal{L}(\Lambda p))\,U(\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))\,|t,s,m\rangle$$

Il est facile de voir que :

$$\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p)$$

laisse le quadrivecteur $t = (1,0,0,0)$ invariant. C'est donc une rotation du petit groupe de t appelée rotation de Wigner. Cette remarque nous permet d'écrire, en se servant de la relation (IV-12) :

$$U(\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))\,|t,s,m\rangle = |t,s,m'\rangle\, D^{s}(\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))^{m'}{}_{m}$$

d'où :

$$U(a,\Lambda)\,|p,\mathcal{L}(p),s,m\rangle = U(a)\,U(\mathcal{L}(\Lambda p))\,|t,s,m'\rangle\, D^{s}(\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))^{m'}{}_{m}$$

$$= U(a)\,|\Lambda p,\mathcal{L}(\Lambda p),s,m'\rangle\, D^{s}(\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))^{m'}{}_{m}$$

$$= \exp(i\Lambda p\cdot a)\,|\Lambda p,\mathcal{L}(\Lambda p),s,m'\rangle\, D^{s}(\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))^{m'}{}_{m} \qquad \text{(IV-15)}$$

Cette équation (IV-15) donne la loi de transformation d'un état quelconque par une transformation de Lorentz.

Il reste maintenant à assurer l'unitarité de $U(a,\Lambda)$ en introduisant un produit scalaire exprimant l'orthogonalité des états de différentes impulsions. Si nous imposons à ces produits scalaires d'être invariants par une transformation de Lorentz, on obtient :

$$\langle p',\mathcal{L}(p'),s,m'|\,p,\mathcal{L}(p),s,m\rangle = 2\,\omega(p)\,\delta(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta_{mm'}$$

avec : $\omega(p) = \vec{p}^{\,2} + M^{2}$ (IV-16)

4.3) - Etats spinoriels pour $M \neq 0$ -

Considérons une autre transformation de Lorentz $\mathcal{L}'(p)$ telle que :

$$\mathcal{L}'(p) \, , \, t = p$$

En utilisant la relation (IV-13) on obtient :

$$|\, p, \mathcal{L}'(p), s, m \rangle = U(\mathcal{L}'(p)) |t, s, m\rangle$$
$$= U(\mathcal{L}(p))\, U(\mathcal{L}^{-1}(p)\mathcal{L}'(p)) \,|\, t, s, m \rangle$$

Or la transformation :

$$\mathcal{L}^{-1}(p)\, \mathcal{L}'(p)$$

est une rotation de Wigner ; en effet, elle amène t sur p , puis p sur t ; elle laisse donc t invariant et on peut écrire :

$$|\, p, \mathcal{L}'(p), s, m \rangle = U(\mathcal{L}(p)) \,|\, t, s, m' \rangle \; D^s(\mathcal{L}^{-1}(p)\mathcal{L}'(p))^{m'}{}_m$$
$$= |\, p, \mathcal{L}(p), s, m' \rangle \; D^s(\mathcal{L}^{-1}(p)\mathcal{L}'(p))^{m'}{}_m$$

et finalement :

$$|\, p, \mathcal{L}'(p), s, m \rangle \; D^s(\mathcal{L}'^{-1}(p)^m \; A = |\, p, \mathcal{L}(p), s, m' \rangle \; D^s(\mathcal{L}^{-1}(p))^{m'} \; A \qquad \text{(IV-17)}$$

de telle sorte que l'état :

$$|\, p, s, A \rangle = |\, p, \mathcal{L}(p), s, m \rangle \; D^s(\mathcal{L}^{-1}(p))^m \; A \qquad \text{(IV-18)}$$

est indépendant de la transformation $\mathcal{L}(p)$ utilisée pour amener la tétrade $\{t\}$ sur la tétrade $\{p\}$. Un tel état est appelé état spinoriel. Sa loi de transformation sous l'effet d'une transformation de Lorentz est donnée simplement par :

$$U(\Lambda) \; |\, p, s, A \rangle = |\, \Lambda p, s, A \rangle \; D^s(\Lambda)^{A'} \; A \qquad \text{(IV-19)}$$

en se servant de la loi de transformation (IV-16) et de la définition (IV-18).

Il est aussi possible d'introduire trois autres types d'états spinoriels

définis de la façon suivante :

$$|p,s,\overline{A}\rangle = |p,s,A'\rangle\ D^{s}(\epsilon)^{A'}{}_{A}$$
$$|p,s,\dot{\overline{A}}\rangle = |p,s,\mathcal{L}(p),\lambda\rangle\ D^{s}(\mathcal{L}^{+}(p))^{\lambda}{}_{A} \qquad \text{(IV-20)}$$
$$|p,s,\dot{A}\rangle = |p,s,\dot{\overline{A}}'\rangle\ D^{s}(\epsilon^{-1})^{A'}{}_{A}$$

où $\epsilon = -i\sigma_2$

Si nous faisons agir une transformation de Lorentz sur ces différents spineurs, on obtient les lois de transformations suivantes [CMN.68] :

$$U(\Lambda)\,|p,s,\overline{A}\rangle = |\Lambda p,s,\overline{A}'\rangle\ D^{s}(\Lambda^{T-1})^{A'}{}_{A}$$
$$U(\Lambda)\,|p,s,\dot{A}\rangle = |\Lambda p,s,\dot{A}'\rangle\ D^{s}(\Lambda^{*})^{A'}{}_{A} \qquad \text{(IV-21)}$$
$$U(\Lambda)\,|p,s,\dot{\overline{A}}\rangle = |\Lambda p,s,\dot{\overline{A}}'\rangle\ D^{s}(\Lambda^{\dagger-1})^{A'}{}_{A}$$

Nous définissons les vecteurs bras conjugués de ces vecteurs à l'aide des produits scalaires :

$$\langle p,s,A\,|\,p',s',A'\rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p}')\,2\omega(p)\,\delta_{s,s'}\,D^{s}(p\cdot\tfrac{\bar{\sigma}}{m})^{A}{}_{A'}$$
$$\langle p,s,\dot{\overline{A}}\,|\,p',s',A'\rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p}')\,2\omega(p)\,\delta_{s,s}\,\delta_{A,A'} \qquad \text{(IV-22)}$$

la valeur de ces produits scalaires se déduit facilement du produit scalaire (IV-16) et des expressions (IV-19) et (IV-20).

On peut remarquer que ces vecteurs bras se transforment par les matrices complexes conjuguées des vecteurs kets, comme ils doivent le faire pour que la représentation $U(\Lambda)$ soit unitaire.

4.4) - Cas d'une masse nulle -

Nous devons tout d'abord distinguer deux cas. Le premier est de supposer que le nombre quantique lié à l'opérateur de spin W^2 peut être différent de zéro . Mais dans ce cas la représentation ne correspond pas à un objet physique car c'est une représentation de dimension infinie [WIG. 39] . La seule hypothèse qui reste donc est de supposer que $W^2 = 0$. Dans ce cas, on peut écrire les relations suivantes :

$$p^2 = 0 \qquad W^2(p) = 0 \qquad p.W(p) = 0$$

et l'on a nécessairement, comme nous allons le voir dans cette section :

$$W(p) = \lambda(p)\, p \tag{IV-23}$$

Par analogie avec le cas d'une particule massive, nous introduisons une triade de référence $\{\overset{\circ}{p}\}$. Pour cela on choisit un vecteur du genre lumière ($\overset{\circ}{p}^2 = 0$) tel que $\vec{\overset{\circ}{p}}$ soit porté par $n^{(3)}(t)$ et on définit la triade $\{\overset{\circ}{p}\}$ composée des trois quadrivecteurs :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{p} &= n^{(0)}(\overset{\circ}{p}) = n^{(0)}(t) + n^{(3)}(t) = (1,0,0,1) \\ & n^{(1)}(\overset{\circ}{p}) = n^{(1)}(t) = (0,1,0,0) \\ & n^{(2)}(\overset{\circ}{p}) = n^{(2)}(t) = (0,0,1,0) \end{aligned} \tag{IV-24}$$

Soit A une matrice appartenant au groupe SL2(C) et qui laisse invariant $\overset{\circ}{p}$ (elle appartient donc au petit groupe de $\overset{\circ}{p}$) :

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

elle doit laisser invariante la matrice $\frac{1}{2}\sigma \cdot \overset{\circ}{p}$

$$\frac{1}{2}\sigma \cdot \overset{\circ}{p} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On a donc la relation matricielle :

$$\sigma \cdot \mathring{p} = A \, \sigma \cdot \mathring{p} \, A^{+}$$

et par conséquent les éléments de A doivent satisfaire les relations :

$$a d - b c = 1$$

$$|b|^2 = b d^* = b^* d = 0$$

$$|d|^2 = 1$$

On peut donc écrire ces matrices sous la forme :

$$A(Z, \theta) = \begin{vmatrix} \exp(+i\,\theta/2) & 0 \\ Z \exp(-i\,\theta/2) & \exp(-i\,\theta/2) \end{vmatrix} \qquad \text{(IV-25)}$$

où Z est complexe et θ réel. Il est facile de vérifier que ces matrices forment un sous-groupe de SL2(C) et qu'elles possèdent la loi de multiplication :

$$A(Z, \theta)\, A(Z', \theta') = A(e^{i\theta} Z' + Z \,,\, \theta + \theta') \qquad \text{(IV-26)}$$

Cette loi de multiplication est formellement semblable à la loi de multiplication des éléments du groupe de Poincaré agissant dans un plan.

Nous allons chercher maintenant à attacher à p ($p^2 = 0$) des vecteurs du genre espace et, ceci, de façon analogue au cas des particules massives.

Pour cela nous associons à chaque vecteur p ($\mathring{p} > 0$, $p^2 = 0$) une transformation de Lorentz telle que :

$$\mathcal{L}(p) \begin{Bmatrix} \mathring{p} \\ n^{(1)}(t) \\ n^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ n^{(1)}(p) \\ n^{(2)}(p) \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV-27)}$$

Cette transformation de Lorentz amène le vecteur de référence (1, 0, 0, 1) en le vecteur p . De plus, elle transforme la triade $\{\mathring{p}\}$ en la

triade $\{p\}$ constituée des vecteurs :

$$p = n^{(0)}(p) + n^{(3)}(p)$$
$$n^{(1)}(p) \qquad \text{(IV-28)}$$
$$n^{(2)}(p)$$

Si nous considérons l'opérateur de polarisation $W(q)$ défini par l'égalité (III-18), nous voyons que l'on peut le décomposer sur $n^{(1)}(p)$, $n^{(2)}(p)$ et p puisque $p^2 = 0$.

On écrira donc :

$$W(p) = W_1(p)\, n^{(1)}(p) + W_2(p)\, n^{(2)}(p) + \lambda(p) \cdot p \qquad \text{(IV-29)}$$

Les opérateurs $W_1(p)$, $W_2(p)$ et $\lambda(p)$ engendrent l'algèbre de Lie d'une représentation unitaire irréductible du petit groupe de p. Les règles de commutation déduites de l'équation (III-23) sont :

$$\begin{aligned} \left[W_1(p), W_2(p)\right] &= 0 \\ \left[W_1(p), \lambda(p)\right] &= -i\, W_2(p) \\ \left[W_2(p), \lambda(p)\right] &= i\, W_1(p) \end{aligned} \qquad \text{(IV-30)}$$

On retrouve les relations de commutation des générateurs du groupe de Poincaré agissant dans un plan. $W_1(p)$ et $W_2(p)$ sont les générateurs des translations et $\lambda(p)$ est le générateur des rotations.

L'opérateur $W^2(p)$ s'écrit :

$$W^2(p) = -(W_1(p))^2 - (W_2(p))^2 \qquad \text{(IV-31)}$$

et comme $W^2(p)$ est égal à zéro, nous en concluons que :

$$W_1(p) = W_2(p) = 0$$

Il nous reste un seul opérateur : le générateur des rotations $\lambda(p)$ et nous avons par conséquent :

$$W(p) = \lambda(p) \cdot p \qquad \text{(IV-32)}$$

Les représentations unitaires irréductibles des rotations d'angle θ sont fournies par les nombres $\exp(i\lambda\theta)$ avec λ entier ou demi-entier. Le nombre λ caractérise complètement la représentation considérée. Le petit groupe de p sur lequel agit cette représentation est donc un groupe à une dimension. D'après cette remarque, on peut définir les vecteurs de base :

$$| p, \mathcal{L}(p), \lambda \rangle$$

vérifiant les relations suivantes :

$$\lambda(p) | p, \mathcal{L}(p), \lambda \rangle = \lambda | p, \mathcal{L}(p), \lambda \rangle \qquad \text{(IV-33)}$$

$$W_1(p) | p, \mathcal{L}(p), \lambda \rangle = 0 \qquad \text{(IV-34)}$$

$$W_2(p) | p, \mathcal{L}(p), \lambda \rangle = 0 \qquad \text{(IV-35)}$$

Donc, sur le petit groupe de p , on a :

$$\lambda(p) = \lambda$$

et par conséquent :

$$W(p) = \lambda p$$

et, cette relation étant vraie quel que soit p , on a sur tout l'espace de représentation :

$$W(p) = \lambda P \qquad \text{(IV-36)}$$

λ (entier ou demi-entier) est l'hélicité de la particule de masse nulle.

Nous pouvons faire deux remarques sur les équations (IV-34) et (IV-35).

Elles montrent d'abord que les états $|\, p, \mathcal{L}(p), \lambda \rangle$ sont invariants de jauge. En effet, si nous considérons une translation infinitésimale, elle sera représentée par l'opérateur :

$$U(a) = I + \epsilon W_1(p) + \eta W_2(p) \qquad \text{(IV-37)}$$

puisque $W_1(p)$ et $W_2(p)$ sont les générateurs des translations. D'après les relations (IV-34) et (IV-35), cette translation va laisser invariant le vecteur $|\, p, \mathcal{L}(p), \lambda \rangle$ et l'on retrouve ainsi la définition habituelle de l'invariance de jauge.

Le fait que $W_1(p) \pm i W_2(p) \equiv 0$ montre qu'il existe une seule valeur du spin mesurée sur l'axe porté par l'impulsion.

4.5) - Etats spinoriels pour M = 0 -

Considérons maintenant deux triades $\{p\}$ et $\{p'\}$ qui diffèrent l'une de l'autre par le choix des vecteurs $n^{(1)}(p)$ et $n^{(2)}(p)$ situés dans le bi-plan orthogonal à $n^{(0)}(p)$ et $n^{(3)}(p)$:

$$\begin{aligned} n'^{(0)}(p) &= n^{(0)}(p) \\ n'^{(1)}(p) &= n^{(1)}(p)\cos\varphi - n^{(2)}(p)\sin\varphi \\ n'^{(2)}(p) &= n^{(1)}(p)\sin\varphi + n^{(2)}(p)\cos\varphi \\ n'^{(3)}(p) &= n^{(3)}(p) \end{aligned} \qquad \text{(IV-38)}$$

alors, le vecteur $|\, p, \mathcal{L}'(p), \lambda \rangle$ est relié au vecteur $|\, p, \mathcal{L}(p), \lambda \rangle$ par la relation :

$$\begin{aligned} |\, p, \mathcal{L}'(p), \lambda \rangle &= |\, p, \mathcal{L}(p), \lambda \rangle \exp(i\lambda\varphi) \\ &= |\, p, \mathcal{L}(p), \lambda \rangle\, D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{-1}(p)\,\mathcal{L}'(p))^{\lambda}\lambda \end{aligned} \qquad \text{(IV-39)}$$

où il n'y a pas de sommation sur λ (ce que nous sous-entendrons systématiquement chaque fois qu'il sera question d'une particule de masse nulle).

Ceci nous permet d'établir, comme précédemment, les lois de transformation des états; à savoir :

$$U(a,\Lambda)\,|\,p,\mathcal{L}(p),\lambda\rangle = e^{i\Lambda p\cdot a}\,|\,\Lambda p,\mathcal{L}(\Lambda p),\lambda\rangle\, D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))^{\lambda}{}_{\lambda} \qquad \text{(IV-40)}$$

Nous allons, à partir de maintenant, distinguer deux cas suivant que λ est plus grand ou plus petit que zéro. En effet, si :

$$\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p) = \begin{vmatrix} \exp(i\theta/2) & 0 \\ Z\exp(-i\theta/2) & \exp(-i\theta/2) \end{vmatrix}$$

on a :

$$\left[\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p)\right]^{\dagger -1} = \begin{vmatrix} \exp(i\theta/2) & -Z^{*}\exp(i\theta/2) \\ 0 & \exp(-i\theta/2) \end{vmatrix}$$

et en remarquant que :

$$D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))^{\lambda}{}_{\mu} = \delta_{\lambda\mu}\, D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))^{\lambda}{}_{\lambda} \quad \text{pour } \lambda > 0$$

$$D^{|\lambda|}((\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))^{\dagger -1})^{\lambda}{}_{\mu} = \delta_{\lambda\mu}\, D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))^{\lambda}{}_{\lambda} \quad \text{pour } \lambda < 0 \qquad \text{(IV-41)}$$

on peut remplacer l'équation (IV-40) par les deux équations suivantes, correspondant à une valeur de λ positive ou négative :

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\,|\,p,\mathcal{L}(p),\lambda\rangle\,\delta^{\lambda}{}_{\mu} &= |\Lambda p,\mathcal{L}(\Lambda p),\lambda\rangle\, D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))^{\lambda}{}_{\mu} \\ &= |\Lambda p,\mathcal{L}(\Lambda p),\lambda\rangle\,\delta^{\lambda}{}_{\nu}\, D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))^{\nu}{}_{\mu} \quad \text{pour } \lambda > 0 \\ &= |\Lambda p,\mathcal{L}(\Lambda p),\lambda\rangle\,\delta^{\lambda}{}_{\nu}\, D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{\dagger}(\Lambda p)\Lambda^{\dagger -1}\mathcal{L}^{+1}(p))^{\nu}{}_{\mu} \quad \text{pour } \lambda < 0 \end{aligned} \qquad \text{(IV-42)}$$

Par conséquent, nous pouvons définir les $2|\lambda|+1$ états suivants :

$$|p,\mathcal{L}(p),\lambda,\mu\rangle = |p,\mathcal{L}(p),\lambda\rangle\,\delta^{\lambda}{}_{\mu} \qquad \text{(IV-43)}$$

Il est évident que les états tels que $\mu \neq \lambda$ sont nuls. Mais nous les introduisons de façon à pouvoir traiter le cas des particules de masse nulle d'une façon analogue à celui des particules massives.

L'effet d'une transformation de Lorentz Λ, agissant sur ces états est simplement exprimée par les relations :

$$U(\Lambda)|p,\mathcal{L}(p),\lambda,\mu\rangle = |\Lambda p,\mathcal{L}(\Lambda p),\lambda,\nu\rangle\; D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))^{\nu}{}_{\mu}$$

pour $\lambda > 0$

et (IV-44)

$$U(\Lambda)|p,\mathcal{L}(p),\lambda,\mu\rangle = |\Lambda p,\mathcal{L}(\Lambda p),\lambda,\nu\rangle\; D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{\dagger}(\Lambda p)\Lambda^{\dagger}{}^{-1}\mathcal{L}^{\dagger}{}^{-1}(p))^{\nu}{}_{\mu}$$

pour $\lambda < 0$

Considérons maintenant une autre transformation de Lorentz telle que :

$$\mathcal{L}'(p)\,.\,\overset{\circ}{p} = p$$

on trouve que :

$$|p,\mathcal{L}'(p),\lambda,\mu\rangle = |p,\mathcal{L}(p),\lambda,\nu\rangle\; D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{-1}(p)\mathcal{L}'(p))^{\nu}{}_{\mu}$$

pour $\lambda > 0$

et

$$|p,\mathcal{L}'(p),\lambda,\mu\rangle = |p,\mathcal{L}(p),\lambda,\nu\rangle\; D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{\dagger}(p)\mathcal{L}'^{\dagger}{}^{-1}(p))^{\nu}{}_{\mu}$$

pour $\lambda < 0$

De telle sorte que les $2|\lambda|+1$ états $|p,+|\lambda|,A\rangle$ et $|p,-|\lambda|,\bar{A}^{\circ}\rangle$ définis à partir des égalités :

$$|\, p,\, +|\lambda|,\, A\,\rangle = |\, p, \mathcal{L}(p), \lambda, \mu\,\rangle\; D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{-1}(p))^{\mu}\; A$$
$$= |\, p, \mathcal{L}(p), \lambda\,\rangle\; D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{-1}(p))^{\lambda}\; A$$
$$\text{pour} \quad \lambda > 0 \qquad \text{(IV-45)}$$

et

$$|\, p,\, -|\lambda|,\, \bar{A}^{\circ}\,\rangle = |\, p, \mathcal{L}(p), \lambda, \mu\,\rangle\; D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{\dagger}(p))^{\mu}\; A$$
$$= |\, p, \mathcal{L}(p), \lambda\,\rangle\; D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{+}(p))^{\lambda}\; A$$
$$\text{pour} \quad \lambda < 0 \qquad \text{(IV-46)}$$

sont indépendants du choix particulier de la transformation de Lorentz qui amène la triade $\{\mathring{p}\}$ sur la triade $\{p\}$.

De tels états sont appelés états spinoriels et, en utilisant la formule (IV-44) , on voit qu'iis se modifient simplement sous l'effet d'une transformation de Lorentz. Plus explicitement :

$$U(\Lambda)\,|\, p,\, +|\lambda|,\, A\,\rangle = |\, \Lambda p,\, +|\lambda|,\, A'\,\rangle\; D^{|\lambda|}(\Lambda)^{A'}\; A$$
$$U(\Lambda)\,|\, p,\, -|\lambda|,\, \bar{A}^{\circ}\,\rangle = |\, \Lambda p,\, -|\lambda|,\, \bar{A}^{\circ\prime}\,\rangle\; D^{|\lambda|}(A^{\dagger -1})^{A'}\; A \qquad \text{(IV-47)}$$

Il est aussi utile de définir deux autres types d'états spinoriels par les relations :

$$|\, p,\, +|\lambda|,\, \bar{A}\,\rangle = |\, p,\, +|\lambda|,\, A'\,\rangle\; D^{|\lambda|}(\epsilon)^{A'}\; A$$
$$|\, p,\, -|\lambda|\, \mathring{A}\,\rangle = |\, p,\, -|\lambda|\, \bar{A}^{\circ\prime}\,\rangle\; D^{|\lambda|}(\epsilon^{-1})^{A'}\; A \qquad \text{(IV-48)}$$

qui, par une transformation de Lorentz, se transforment simplement de la façon suivante :

$$U(\Lambda)\,|\, p,\, +|\lambda|,\, \bar{A}\,\rangle = |\, \Lambda p,\, +|\lambda|\, \bar{A}'\,\rangle\; D^{|\lambda|}(\Lambda^{T\,-1})^{A'}\; A$$
$$U(\Lambda)\,|\, p,\, -|\lambda|,\, \mathring{A}\,\rangle = |\, \Lambda p,\, -|\lambda|\, \mathring{A}'\,\rangle\; D^{|\lambda|}(\Lambda^{*})^{A'}\; A \qquad \text{(IV-49)}$$

Nous pouvons aussi définir les produits scalaires de ces vecteurs avec les

vecteurs bras correspondants :

pour $\lambda > 0$:

$$\langle p', +|\lambda'|, A' \mid p, +|\lambda|, A \rangle = D^{|\lambda'|}(\mathcal{L}_+^{-1}(p'))^{A'}{}_{\lambda'} D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{-1}(p))^{\lambda}{}_{A} \langle p', \mathcal{L}(p'), \lambda' p, \mathcal{L}(p), \lambda \rangle$$

$$= D^{|\lambda|}(\mathcal{L}_+^{-1}(p)\, \frac{1+\sigma_z}{2}\, \mathcal{L}^{-1}(p))^{A'}{}_{A}\, 2\omega(p)\, \delta(\vec{p}-\vec{p}')\, \delta|\lambda|, |\lambda'|$$

$$= D^{|\lambda|}(p\, \frac{\bar{\sigma}}{2})^{A'}{}_{A}\, 2\omega(p)\, \delta(\vec{p} - \vec{p}')\, \delta|\lambda|, |\lambda'| \qquad \text{(IV-50)}$$

et pour $\lambda < 0$:

$$\langle p', -|\lambda'|, \bar{A}^{\bullet'} \mid p, -|\lambda|, \bar{A}^{\bullet} \rangle = D^{|\lambda|}(\frac{\sigma \cdot p}{2})^{A'}{}_{A}\, 2\omega(p)\, \delta(\vec{p}-\vec{p}')\, \delta|\lambda|, |\lambda'| \qquad \text{(IV-51)}$$

.6) - Invariance de jauge -

Nous allons voir que les états spinoriels $|\, p, +|\lambda|, A \rangle$ (resp. $|\, p, -|\lambda|, \bar{A}^{\bullet} \rangle$) ne sont pas indépendants. Le but de cette section est de trouver les relations existant entre ces différents états.

Par inversion des équations (IV-45) et (IV-46), nous obtenons des relations entre états spinoriels que l'on appelle conditions de jauge. Elles s'écrivent :

$$|\, p, +|\lambda|, A \rangle\, D^{|\lambda|}(\mathcal{L}(p))^{A}{}_{\mu} = |\, p, \mathcal{L}(p), \lambda \rangle\, \delta^{\lambda}{}_{\mu} \qquad \text{(IV-52)}$$

$$|\, p, -|\lambda|, A^{\bullet} \rangle\, D^{|\lambda|}(\mathcal{L}_+^{-1}(p))^{A}{}_{\mu} = |\, p, \mathcal{L}(p), \lambda \rangle\, \delta^{\lambda}{}_{\mu} \qquad \text{(IV-53)}$$

Ces relations viennent du fait que nous avons défini les $2|\lambda|+1$ états spinoriels à partir de $2|\lambda|+1$ états $|\, p, \mathcal{L}(p), \lambda, \mu \rangle$. Mais, ceux-ci étant nuls pour $\lambda \neq \mu$, les états spinoriels ne peuvent pas être linéairement indépendants.

On peut obtenir des conditions de jauge d'une utilisation plus pratique en éliminant les vecteurs $|\, p, \mathcal{L}(p), \lambda >$ dans les équations (IV-45) et (IV-46) à l'aide des égalités (IV-52) et (IV-53) que nous venons d'établir.

Dans le cas où λ est plus grand que zéro, on obtient :

$$|\, p, +|\lambda|, A > = |\, p, \mathcal{L}(p), \lambda > \; D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{-1}(p))^{\lambda}{}_{A}$$

$$= |\, p, +|\lambda|, A' > \; D^{|\lambda|}(\mathcal{L}(p))^{A'}{}_{\nu}\, \delta_{|\lambda|,\mu}\, \delta_{|\lambda|,\nu}\, D^{|\lambda|}(\mathcal{L}^{-1}(p))^{\mu}{}_{A}$$

en remarquant que :

$$\delta_{|\lambda|,\mu}\, \delta_{|\lambda|,\nu} = D^{|\lambda|}\left(\frac{1+\sigma_z}{2}\right)^{\nu}{}_{\mu}$$

nous pouvons récrire cette égalité :

$$= |\, p, +|\lambda|, A' > \; D^{|\lambda|}\left(\mathcal{L}(p)\, \frac{1+\sigma_z}{2}\, \mathcal{L}^{-1}(p)\right)^{A'}{}_{A}$$

$$= |\, p, +|\lambda|, A' > \; D^{|\lambda|}\left(\mathcal{L}(p)\mathcal{L}^{\dagger}(p)\mathcal{L}^{\dagger\,-1}(p)\, \frac{1+\sigma_z}{2}\, \mathcal{L}^{-1}(p)\right)^{A'}{}_{A}$$

nous allons maintenant définir un quadrivecteur e par la relation :

$$\sigma \cdot e = \mathcal{L}(p)\, \mathbb{1}\, \mathcal{L}^{+}(p) \qquad \text{(IV-54)}$$

Cette définition signifie que le quadrivecteur $t = (1, 0, 0, 0)$ est amené par la transformation $\mathcal{L}(p)$ sur le quadrivecteur e. Donc e est du genre temps ($e^2 > 0$). Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} p \cdot e &= \frac{1}{2}\, \mathrm{Tr}(\underline{\sigma} \cdot p\; \bar{\sigma} \cdot e) \\ &= \frac{1}{2}\, \mathrm{Tr}\left[\mathcal{L}(p)(1+\sigma_z)\, \mathcal{L}^{\dagger}(p)\, \mathcal{L}^{\dagger\,-1}(p)\mathcal{L}^{-1}(p)\right] \\ &= \frac{1}{2}\, \mathrm{Tr}\left[\mathcal{L}(p)(1+\sigma_z)\, \mathcal{L}^{-1}(p)\right] \\ &= \frac{1}{2}\, \mathrm{Tr}\left[1+\sigma_z\right] = 1 \end{aligned} \qquad \text{(IV-55)}$$

et les conditions de jauge peuvent se récrire simplement :

$$
\begin{aligned}
|\, p,\, +|\lambda|, A \,\rangle &= |\, p,\, +|\lambda|, A' \,\rangle \; D^{|\lambda|}\left(\frac{\sigma \cdot e\; \bar{\sigma} \cdot p}{2}\right)^{A'}{}_{A} \\
|\, p,\, -|\lambda|, \dot{\bar{A}} \,\rangle &= |\, p,\, -|\lambda|, \dot{\bar{A}}' \,\rangle \; D^{|\lambda|}\left(\frac{\bar{\sigma} \cdot e\; \sigma \cdot p}{2}\right)^{\dot{A}'}{}_{\dot{A}} \\
|\, p,\, +|\lambda|, \bar{A} \,\rangle &= |\, p,\, +|\lambda|, \bar{A}' \,\rangle \; D^{|\lambda|}\left(\epsilon^{-1}\; \frac{\sigma \cdot e\; \bar{\sigma} \cdot p}{2}\; \epsilon\right)^{A'}{}_{A} \\
|\, p,\, -|\lambda|, \dot{A} \,\rangle &= |\, p,\, -|\lambda|, \dot{A}' \,\rangle \; D^{|\lambda|}\left(\epsilon\; \frac{\bar{\sigma} \cdot e\; \sigma \cdot p}{2}\; \epsilon^{-1}\right)^{\dot{A}'}{}_{\dot{A}}
\end{aligned}
\qquad \text{(IV-56)}
$$

Puisque les spineurs $|\, p,\, +|\lambda|, A \,\rangle$ sont indépendants du choix de $\mathcal{L}(p)$, il est possible de prouver que les équations (IV-56) sont valables pour un quadrivecteur e quelconque, pourvu qu'il vérifie les relations :

$$e \cdot p = 1 \qquad e^2 > 0$$

CINQUIEME CHAPITRE

AMPLITUDES SPINORIELLES et AMPLITUDES d'HELICITE

Nous allons introduire les amplitudes correspondant aux réactions à deux corps. Nous considèrerons d'abord les amplitudes spinorielles dont nous indiquerons les propriétés de covariance et les propriétés d'analyticité. Puis, nous leur imposerons les conditions de jauge. Nous parlerons ensuite des amplitudes d'hélicité et nous montrerons que l'on peut les relier aux amplitudes spinorielles.

5.1) - Amplitudes spinorielles -

Considérons la réaction à deux corps suivante :

$$1 + 2 \longrightarrow 3 + 4 \qquad (m_i \neq 0)$$

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

L'amplitude spinorielle est la quantité suivante :

$$\mathfrak{M}_{A_3 A_4 ; A_1 A_2}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \langle p_3, s_3, \dot{A}_3 ; p_4, s_4, \dot{A}_4 \,|\, T \,|\, p_1, s_1, A_1 ; p_2, s_2, A_2 \rangle \qquad (V\text{-}1)$$

où T est défini à partir de la matrice S par la relation :

$$S = 1 + i (2\pi)^4 \, \delta_4 (p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \, T \qquad (V\text{-}2)$$

Puisque les spineurs des états à deux corps sont obtenus simplement à partir des spineurs des états à une particule, par produit tensoriel, les propriétés de covariance des spineurs vont se retrouver sur les amplitudes.

On va donc obtenir la formule de covariance suivante :

$$\mathfrak{M}_{A_3 A_4 ; A_1 A_2}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathfrak{M}_{A'_3 A'_4 ; A'_1 A'_2}(\Lambda p_1, \Lambda p_2, \Lambda p_3, \Lambda p_4) \otimes$$
$$\otimes D^{S_1}(\Lambda)^{A'_1}{}_{A_1} D^{S_2}(\Lambda)^{A'_2}{}_{A_2} D^{S_3}(\Lambda)^{A'_3}{}_{A_3} D^{S_4}(\Lambda)^{A'_4}{}_{A_4} \qquad (V\text{-}3)$$

ceci pour une transformation de Lorentz quelconque.

Nous allons maintenant examiner le cas particulier où la particule 1 a une masse nulle.

Pour $\lambda_1 > 0$:

$$\mathfrak{M}^{(+)}_{A_3 A_4 ; A_1 A_2}(p_1, p_2, p_3, p_4)$$
$$= \langle p_3, s_3, \dot{A}_3 ; p_4, s_4, \dot{A}_4 | T | p_1, +|\lambda_1|, A_1 ; p_2, s_2, A_2 \rangle \qquad (V\text{-}4)$$

vérifie bien la propriété de covariance (V-3).

Pour $\lambda_1 < 0$:

nous définissons d'abord l'amplitude :

$$\mathfrak{M}_{A_3 A_4 ; \bar{\dot{A}}_1 A_2}(p_1, p_2, p_3, p_4)$$
$$= \langle p_3, s_3, A_3 ; p_4, s_4, A_4 | T | p_1, -|\lambda_1|, \bar{\dot{A}} ; p_2, s_2, A_2 \rangle \qquad (V\text{-}5)$$

qui ne vérifie pas la propriété de covariance (V-3) car :

$$U(\Lambda) | p_1, -|\lambda_1|, \bar{\dot{A}}_1 \rangle = D^{|\lambda|}(\Lambda^{t\,-1})^{\bar{\dot{A}}'_1}{}_{\bar{\dot{A}}_1} | \Lambda p_1, -|\lambda_1| \bar{\dot{A}}'_1 \rangle$$

Mais nous pouvons introduire l'amplitude :

$$\mathfrak{M}^{(-)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \mathfrak{M}_{A_3A_4;\dot{\bar{A}}'_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\bar{\sigma}\cdot p_3}{m_3}\right)^{\dot{\bar{A}}'_1 A_1} \qquad \text{(V-6)}$$

qui, elle, vérifie la propriété de covariance (V-3), ce que nous allons démontrer maintenant.

En utilisant la définition (V-5) et la propriété de transformation du spineur $|p_1, -|\lambda_1|, \dot{\bar{A}}_1\rangle$, on peut écrire :

$$\mathfrak{M}_{A_3A_4;\dot{\bar{A}}_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \mathfrak{M}_{A'_3A'_4;\dot{\bar{A}}'_1A_2}(\Lambda p_1,\Lambda p_2,\Lambda p_3,\Lambda p_4) \otimes$$
$$\otimes\ D^{|\lambda_1|}(\Lambda^{\dagger -1})^{\dot{\bar{A}}'_1\dot{\bar{A}}_1} D^{S_2}(\Lambda)^{A'_2}{}_{A_2} D^{S_3}(\Lambda)^{A'_3}{}_{A_3} D^{S_4}(\Lambda)^{A'_4}{}_{A_4} \qquad \text{(V-7)}$$

en multipliant les deux membres par $D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\bar{\sigma}\cdot p_3}{m_3}\right)$ et en se servant de la définition de l'amplitude :

$$\mathfrak{M}^{(-)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4)$$

on obtient :

$$\mathfrak{M}^{(-)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \mathfrak{M}^{(-)}_{A'_3A'_4;A'_1A'_2}(\Lambda p_1,\Lambda p_2,\Lambda p_3,\Lambda p_4) \otimes$$
$$\otimes\ D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma\cdot p_3}{m_3}\Lambda^{\dagger -1}\frac{\bar{\sigma}\cdot p_3}{m_3}\right)^{A'_1A_1} D^{S_2}(\Lambda)^{A'_2}{}_{A_2} D^{S_3}(\Lambda)^{A'_3}{}_{A_3} D^{S_4}(\Lambda)^{A'_4}{}_{A_4}$$

mais

$$\frac{\sigma\cdot\Lambda p_3}{m_3} = \Lambda\frac{\sigma\cdot p_3}{m_3}\Lambda^{\dagger}$$

donc :

$$\frac{\sigma\cdot\Lambda p_3}{m_3}\Lambda^{\dagger -1}\frac{\sigma\cdot p_3}{m_3} = \Lambda\frac{\sigma\cdot p_3}{m_3}\Lambda^{\dagger}\Lambda^{\dagger -1}\frac{\bar{\sigma}\cdot p_3}{m_3} = \Lambda$$

d'où la propriété énoncée.

Dans le cas où la particule 4 est de masse nulle, il est aussi possible de définir deux amplitudes spinorielles satisfaisant les propriétés de covariance (V-3).

Pour $\lambda_4 < 0$:

$$\mathfrak{M}^{(-)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \langle p_3, S_3, \dot{A}_3; p_4, -|\lambda_4|, \dot{A}_4 | T | p_1, S_1, A_1; p_2, S_2, A_2 \rangle$$

Pour $\lambda_4 > 0$:

$$\mathfrak{M}^{(+)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \langle p_3, S_3, \dot{A}_3; p_4, +|\lambda_4| \bar{A}'_4 | T | p_1, S_1, A_1; p_2, S_2, A_2 \rangle D^{|\lambda_4|}_{\bar{A}'_4 A_4}\left(\frac{\bar{\sigma}\cdot p_3}{m_3}\right) \qquad \text{(V-8)}$$

5.2) - Conditions de jauge -

Les amplitudes spinorielles doivent maintenant vérifier les conditions de jauge (IV-56). Nous allons voir de quelle façon on peut les écrire.

Supposons, par exemple, que la particule 1 est la seule ayant une masse nulle. Nous pouvons alors choisir :

$$e = \frac{p_3}{p_1 \cdot p_3} \qquad \text{car} \qquad e \cdot p_1 = 1$$

Pour $\lambda_1 > 0$:

$$\mathfrak{M}^{(+)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \mathfrak{M}^{(+)}_{A_3A_4;A'_1A_2}(p_3,p_4,p_1,p_2) D^{|\lambda_1|}_{A'_1 A_1}\left(\frac{\sigma\cdot p_3 \bar{\sigma}\cdot p_1}{2(p_3\cdot p_1)}\right) \qquad \text{(V-9)}$$

Pour $\lambda_1 < 0$:

à partir des équations (IV-56) nous trouvons :

$$\mathfrak{M}_{A_3A_4;\dot{\bar{A}}_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \mathfrak{M}_{A_3A_4;\dot{\bar{A}}'_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4)D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\bar{\sigma}\cdot p_3\ \sigma\cdot p_1}{2(p_3\cdot p_1)}\right)^{\dot{\bar{A}}'_1}{}_{\dot{\bar{A}}_1}$$

(V-10)

ce qui implique, en utilisant la définition de $\mathfrak{M}^{(-)}_{A_3A_4A_1A_2}$:

$$\mathfrak{M}^{(-)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \mathfrak{M}^{(-)}_{A_3A_4;A'_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4)D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma\cdot p_3}{m_3}\ \frac{\bar{\sigma}\cdot p_3\sigma\cdot p_1}{2(p_3\cdot p_1)}\ \frac{\bar{\sigma}\cdot p_3}{m_3}\right)^{A'_1}{}_{A_1}$$

(V-11)

c'est-à-dire :

$$\mathfrak{M}^{(-)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \mathfrak{M}^{(-)}_{A_3A_4;A'_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4)D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma\cdot p_1\ \bar{\sigma}\cdot p_3}{2(p_1\cdot p_3)}\right)^{A'_1}{}_{A_1}$$

On obtient des résultats analogues si la seule particule de masse nulle est la particule 4 .

Pour $\lambda_4 < 0$:

$$\mathfrak{M}^{(-)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \mathfrak{M}^{(-)}_{A_3A'_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4)D^{|\lambda_4|}\left(\frac{\sigma\cdot p_3\ \bar{\sigma}\cdot p_4}{2(p_3\cdot p_4)}\right)^{A'_4}{}_{A_4}$$

Pour $\lambda_4 > 0$:

$$\mathfrak{M}^{(+)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \mathfrak{M}^{(+)}_{A_3A'_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4)D^{|\lambda_4|}\left(\frac{\sigma\cdot p_4\ \bar{\sigma}\cdot p_3}{2(p_3\cdot p_4)}\right)^{A'_4}{}_{A_4}$$

(V-12)

En plus des propriétés de covariance et des conditions de jauge, les amplitudes spinorielles possèdent des propriétés d'analyticité. Certaines d'entre elles peuvent être obtenues à partir de la théorie axiomatique des champs où les amplitudes s'introduisent comme des transformées de Fourier des valeurs

moyennes dans le vide de produits des opérateurs de champ ordonnés chronologiquement.

Nous allons rappeler maintenant le développement de Joos des amplitudes spinorielles [JOO. 62] en fonction de polynômes covariants qui sont, comme l'a démontré Williams [WIL. 63] sans singularités cinématiques dans le cas de quatre particules massives.

Les travaux de Hepp [HEP. 63] montrent que ce résultat est encore valable si l'on considère des particules de masse nulle pourvu que l'une d'entre elles (par exemple la troisième) soit de masse différente de zéro.

Par exemple, si la particule 1 est de masse nulle et possède une hélicité $+|\lambda_1|$ et si m_3 est différent de zéro, nous pouvons écrire :

$$\mathfrak{M}^{(+)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma\cdot p_3\,\bar{\sigma}\cdot p_1}{2(p_3\cdot p_1)}\right)^{A'_1}{}_{A_1} \otimes$$

$$\sum_{\ell_1+\ell_2=\begin{cases} J \\ J+1 \end{cases}} (J;\mathcal{J};|\lambda_1|,s_2,s_3,s_4)^{A}{}_{A'_1A_2A_3A_4}\, a_{\ell_1,\ell_2}(s,t)(J,\ell_1,\ell_2)^{M_1M_2}{}_{A}$$

$$Y^{\ell_1}_{M_1}(\vec{e}(p_1,p_3))\; Y^{\ell_2}_{M_2}(\vec{e}(p_2,p_3)) \qquad \text{(V-13)}$$

où $(J,\ell_1,\ell_2)A^{M_1,M_2}$ est un coefficient de Clebsch-Gordon et $(J;\mathcal{J};|\lambda_1|, s_2,s_3,s_4)^{A}{}_{A'_1A_2A_3A_4}$ est le coefficient de couplage de $|\lambda_1|, s_2, s_3, s_4$ donnant J. Le mode de couplage étant défini par $\mathcal{J}$.

$Y^{\ell}_{M}(\vec{e})$ est l'harmonique sphérique à trois dimensions qui

s'écrit :

$$Y^{\ell}_{M}(\vec{e}) = \left\{ \frac{(2\ell+1)(\ell+M)!\,(\ell-M)!}{4\pi} \right\}^{1/2} (\ell_{\epsilon})^{|M|}$$

$$\otimes \sqrt{\vec{e}^{\,2}}^{\,e-|M|} \; P^{|M|,|M|}_{e-|M|}(\hat{e}_3)$$

$$\ell_{\epsilon} = -\epsilon \frac{e_1 + i\epsilon e_2}{2} \qquad \epsilon = \frac{M}{|M|} \qquad \hat{e}_3 = \frac{e_3}{\sqrt{\vec{e}^{\,2}}}$$

$\vec{e}(p_i, p_j)$ est le semi-bivecteur associé à $p_i \Lambda p_j$

$$\vec{e}(p_i, p_j) = \frac{1}{2}\left[p_i \vec{p}_j - p_j \vec{p}_i - i(\vec{p}_i \otimes \vec{p}_j) \right] \qquad \text{(V-14)}$$

$$e^2(p_i, p_j) = \frac{1}{4}(p_i \cdot p_j)^2 - m_i^2 m_j^2$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 \qquad t = (p_1 - p_3)^2$$

$a_{\ell_1, \ell_2}(s,t)$ sont les amplitudes invariantes de Joos.

Dans le cas de quatre particules massives, les amplitudes $a_{\ell_1, \ell_2}(s,t)$ représentent exactement le nombre requis d'amplitudes indépendantes. Dans le cas d'une ou plusieurs particules de masse nulle, ces $a_{\ell_1, \ell_2}(s,t)$ ne sont pas indépendantes.

Zwanziger [ZWA. 64] a montré comment les réduire sur une base de fonctions analytiques indépendantes.

Cependant, pour étudier les propriétés analytiques des amplitudes spinorielles, le développement de Joos est suffisant car la réduction n'entraine aucune perte d'analyticité.

(.3) - Amplitudes d'hélicité -

Nous allons d'abord définir la tétrade d'hélicité pour un système composé de deux particules massives de quadrivecteur énergie impulsion p_1 et p_2 .

Cette tétrade est déterminée par un choix particulier de l'axe $n^{(3)}(p)$. En effet, on choisit $n^{(3)}(p_1)$ et $n^{(3)}(p_2)$ dans le bi-plan p_1 , p_2 à l'aide de la définition :

$$n^{(3)}(p_i) = h_{12}(p_i) = - \frac{+m_i^2 - (p_i \cdot P)\, p_i}{m_i \left\{ (p_i \cdot P)^2 - m_i^2 P^2 \right\}^{1/2}} \qquad (V\text{-}15)$$

où $P = p_1 + p_2$. Nous avons déterminé le signe du quadrivecteur hélicité $h_{12}(p_i)$ en imposant au produit scalaire

$$\vec{h}_{12}(p_i) \cdot \vec{p}_i$$

d'être positif. Jusqu'à présent les axes $n^{(2)}(p_i)$ sont complètement arbitraires. Dans une réaction à deux corps, puisque :

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 = P$$

le quadrivecteur dont les composantes sont :

$$W_\mu = - 2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{p_1^\nu p_2^\rho p_3^\sigma}{\sqrt{\phi(s,t)}} \qquad (V\text{-}16)$$

$$(W_\mu W^\mu = -1)$$

est orthogonal à p_i et à $h_{12}(p_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

$\phi(s,t)$ est l'équation de la frontière de la région physique. Le signe moins assure que dans le système du centre de masse :

$$\vec{W} = \vec{p}_1 \wedge \vec{p}_3$$

si l'on choisit pour $\sqrt{\phi}$ la détermination positive. Autrement dit, le vecteur $\vec{W}$ est normal au plan de la réaction. Par conséquent, il est avantageux d'utiliser ce vecteur dans la tétrade d'hélicité et nous poserons :

$$n^{(2)}(p_i) = W \qquad i = 1,2,3,4$$

Nous pouvons maintenant définir l'amplitude d'hélicité dans le cas de quatre particules massives par la relation [JAC. 59] :

$$M_{\lambda_3 \lambda_4; \lambda_1 \lambda_2}(s,t) = \langle p_3, L_{12}(p_3), s_3, \lambda_3; p_4, L_{12}(p_4), s_4, \lambda_4 | T | p_4, L_{12}(p_1), s_1, \lambda_1, p_4, L_{12}(p_2), s_2, \lambda_2 \rangle \qquad \text{(V-17)}$$

où $L_{12}(p_i)$ est la transformation de Lorentz telle que :

$$L_{12}(p_i)\, 0 \quad \begin{cases} t \\ n^{(2)}(t) \\ n^{(3)}(t) \end{cases} = \begin{cases} p_i/m_i \\ W \\ h_{12}(p_i) \end{cases}$$

Moussa et Stora [MOU. 65] ont montré qu'il est possible d'écrire cette transformation de Lorentz de la façon suivante :

$$L_{12}(p_i) = B\left(\frac{p_i}{m_i} \leftarrow \frac{P}{\sqrt{S}}\right) R_{12}\left(q_{ij} \leftarrow n^{(3)}(P)\right) [P] \in \qquad \text{(V-18)}$$

$B\left(\frac{p_i}{m_i} \leftarrow \frac{p_j}{m_j}\right)$ est la transformation de Lorentz pure qui amène p_j/m_j sur p_i/m_i .

$$B\left(\frac{p_j}{m_j} \leftarrow \frac{p_i}{m_i}\right) = \frac{1 + \frac{\sigma \cdot p_j}{m_j} \quad \frac{\bar{\sigma} \cdot p_i}{m_i}}{\left\{2\left(1+\left(p_i \cdot p_j / m_i \cdot m_j\right)\right)\right\}^{1/2}}$$

$[P]$ est une transformation de Lorentz arbitraire qui amène t sur $P/\sqrt{S}$.

$$\epsilon = \begin{cases} -i\sigma_2 & \text{pour} \quad i = 2,4 \\ 1 & \text{pour} \quad i = 1,3 \end{cases}$$

$R_{12}(q_{ij} \longleftarrow n^{(3)}(P))$ est la transformation de Lorentz de trace positive qui laisse P invariant et qui amène :

$$n^{(2)}(P) = \left[P\right] n^{(2)}(t) \quad \text{sur} \quad W$$
$$n^{(3)}(P) = \left[P\right] n^{(3)}(t) \quad \text{sur} \quad q_{ij}$$

Cette transformation agit dans le bi-plan $n^{(2)}(P)$, $n^{(3)}(P)$ et elle s'écrit :

$$q_{ij} = \frac{p_i - p_j - \dfrac{P \cdot (p_i - p_j)}{P^2} P}{\left\{ \dfrac{(P \cdot (p_i - p_j))^2}{P^2} - (p_i - p_j)^2 \right\}^{1/2}} \qquad \begin{matrix} i = 1,2 & j = 2,1 \\ i = 3,4 & j = 4,3 \end{matrix}$$

q_{ij} est dans le bi-plan p_i , p_j et orthogonal à P .

Dans le cas où une des particules est de masse nulle, il n'est pas possible de définir $h_{12}(p_i)$, mais on peut encore définir une base d'hélicité constituée des vecteurs p_i , $n^{(1)}(p_i)$, W et une transformation de Lorentz $L_{12}(p_i)$ telle que :

$$L_{12}(p_i) \cdot \begin{cases} \dot{p} \\ n^{(1)}(t) \\ n^{(2)}(t) \end{cases} = \begin{cases} p_i \\ n^{(1)}(p_i) \\ W \end{cases}$$

Moussa et Stora [MOU. 64] ont montré qu'il est possible d'écrire cette transformation de Lorentz de la façon suivante :

Dans le cas $m_1 = 0$:

$$L_{12}(p_1) = B(p_1 \longleftarrow \hat{P} + \hat{q}_{12}) R_{12}(\hat{q}_{12} \longleftarrow n^{(3)}(P)) \left[P\right]$$

Dans le cas $m_2 = 0$:

$$L_{12}(p_2) = B(p_2 \leftarrow \hat{P} - \hat{q}_{12}) R_{12}(\hat{q}_{12} \leftarrow n^{(3)}(P)) \left[P\right] \epsilon$$

(V-19)

.4) - Relations entre amplitudes -

En utilisant les relations (IV-18), (IV-45) et (IV-46) nous pouvons relier les états d'hélicité aux états spinoriels. On trouve que :

$$|p_i, L_{12}(p_i), s_i, \lambda_i\rangle = |p_i, s_i, A_i\rangle \; D^{s_i}(L_{12}(p_i))^{A_i}\lambda_i$$

pour $m_i \neq 0$

$$|p_i, L_{12}(p_i), \lambda_i\rangle = |p_i, +|\lambda_i| A_i\rangle \; D^{|\lambda_i|}(L_{12}(p_i))^{A_i}\lambda_i$$

$m_i = 0 \qquad \lambda_i > 0$

$$|p_i, L_{12}(p_i), \lambda_i\rangle = |p_i, -|\lambda_i|, \dot{\bar{A}}_i\rangle \; D^{|\lambda_1|}(L_{12}^{\dagger -1}(p_i))^{A_i}\lambda_i$$

$m_i = 0 \qquad \lambda_1 < 0$

Ces formules nous permettent de relier les amplitudes spinorielles aux amplitudes d'hélicité. En tenant compte des conditions de jauge (V-9) et (V-11), les amplitudes d'hélicité s'écrivent :

$$M_{\lambda_3\lambda_4;+|\lambda_1|\lambda_2}(s,t) = \mathfrak{M}^{(+)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) \otimes$$

$$D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma\cdot p_3 \bar{\sigma}\cdot p_1}{2\, p_3\cdot p_1} L_{12}(p_1)\right)^{A_1}\lambda_1 D^{S_2}(L_{12}(p_2))^{A_2}\lambda_2 D^{S_3}(L_{12}(p_3)\epsilon)^{A_3}\lambda_3 D^{S_4}(L_{12}(p_4)\epsilon)^{A_4}\lambda_4$$

pour $\lambda_1 > 0$ (V-20)

$$M_{\lambda_3\lambda_4;-|\lambda_1|\lambda_2}(s,t) = \mathfrak{M}^{(-)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) \otimes$$

$$D^{|\lambda_1|}\left(\frac{m_3\sigma\cdot p_1}{2p_3\cdot p_1}L_{12}^{\dagger\,-1}(p_1)\right)^{A_1}{}_{\lambda_1} D^{S_2}(L_{12}(p_2))^{A_2}{}_{\lambda_2} D^{S_3}(L_{12}(p_3)\epsilon)^{A_3}{}_{\lambda_3} D^{S_4}(L_{12}(p_4)\epsilon)^{A_4}{}_{\lambda_4}$$

pour $\lambda_1 < 0$ (V-21)

Mais par définition de $L_{12}(p_1)$:

$$L_{12}(p_1)(1-\sigma_z)L_{12}^{\dagger}(p_1) = \sigma\cdot p_1$$

$$L_{12}^{\dagger\,-1}(p_1)(1+\sigma_z)L_{12}^{-1}(p_1) = \bar{\sigma}\cdot p_1$$

donc :

$$\bar{\sigma}\cdot p_1\, L_{12}(p_1) = L_{12}^{\dagger\,-1}(p_1)(1+\sigma_z)$$

et

$$\sigma\cdot p_1\, L_{12}^{\dagger\,-1}(p_1) = L_{12}(p_1)(1-\sigma_z)$$

ce qui prouve que :

$$D^{|\lambda_1|}\left(\frac{m_3}{2p_3\cdot p_1}\,\sigma\cdot p_1\, L_{12}^{\dagger\,-1}(p_1)\right)^{A_1}{}_{\lambda_1} = \delta_{\lambda_1,-|\lambda_1|}\, D^{|\lambda_1|}\left(\frac{m_3}{2p_3\cdot p_1}L_{12}(p_1)\right)^{A_1}{}_{\lambda_1}$$

(V-22)

$$D^{|\lambda|}\left(\frac{\sigma\cdot p_3\,\bar{\sigma}\cdot p_1}{2p_3\cdot p_1}L_{12}(p_1)\right)^{A_1}{}_{\lambda_1} = \delta_{\lambda_1,+|\lambda_1|}\, D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma\cdot p_3}{2p_3\cdot p_1}L_{12}^{\dagger\,-1}(p_1)\right)^{A_1}{}_{\lambda_1}$$

On obtient donc finalement :

$$M_{\lambda_3\lambda_4\,+|\lambda_1|,\lambda_2}(s,t) = \mathfrak{M}^{(+)}_{A_3A_4A_1A_2}(p_1,p_2,p_3p_4) \otimes$$

$$D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma\cdot p_3}{2p_3\cdot p_1}L_{12}^{\dagger\,-1}(p_1)\right)^{A_1}{}_{|\lambda_1|} D^{S_2}(L_{12}(p_2))^{A_2}{}_{\lambda_2} D^{S_3}(L_{12}(p_3)\epsilon)^{A_3}{}_{\lambda_3} D^{S_4}(L_{12}(p_4)\epsilon)^{A_4}{}_{\lambda_4}$$

pour $\lambda_1 > 0$ (V-23)

$$M_{\lambda_3\lambda_4 - |\lambda_1|\lambda_2}(s,t) = \mathfrak{M}^{(-)}_{A_3A_4A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) \otimes$$

$$\otimes D^{|\lambda_1|}\left(\frac{m_3}{2p_3\cdot p_1} L_{12}(p_1)\right)^{A_1} - |\lambda_1| D^{S_2}(L_{12}(p_2))^{A_2} \lambda_2 D^{S_3}(L_{12}(p_3)\epsilon)^{A_3} \lambda_3 D^{S_4}(L_{12}(p_4)\epsilon)^{A_4} \lambda_4$$

pour $\lambda_1 < 0$ (V-24)

D'un autre côté, si $m_4 = 0$ on obtient les résultats suivants :

$$U_{\lambda_3 - |\lambda_4| \lambda_1 \lambda_2}(s,t) = \mathfrak{M}^{(-)}_{A_3A_4A_1A_2}(p_1,p_2,p_3,p_4) \otimes$$

$$\otimes D^{S_1}(L_{12}(p_1))^{A_1} \lambda_1 D^{S_2}(L_{12}(p_2))^{A_2} \lambda_2 D^{S_3}(L_{12}(p_3)\epsilon)^{A_3} \lambda_3 D^{|\lambda_4|}\left(\frac{\sigma\cdot p_3}{2p_3\, p_4} L_{12}{}^{+^{-1}}(p_4)\epsilon\right)^{A_4} - |\lambda_4|$$

pour $\lambda_4 < 0$ (V-25)

$$U_{\lambda_3, +|\lambda_4|, \lambda_1, \lambda_2}(s,t) = \mathfrak{M}^{(+)}_{A_3A_4A_1A_2}(p_1\, p_2\, p_3\, p_4) \otimes$$

$$\otimes D^{S_1}(L_{12}(p_1))^{A_1} \lambda_1 D^{S_2}(L_{12}(p_2))^{A_2} \lambda_2 D^{S_3}(L_{12}(p_3)\epsilon)^{A_3} \lambda_3 D^{|\lambda_4|}\left(\frac{m_3}{2p_3\cdot p_4} L_{12}(p_4)\epsilon^{-1}\right)^{A_4} + |\lambda_4|$$

BIBLIOGRAPHIE de la PREMIERE PARTIE

BAR 48 V. Bargmann, E.P. Wigner, Proceedings of the National Academy of the U.S.A., 34, 211, (1948).

BAR 54 V. Bargmann, Ann. of Math., 59, 1, (1954).

BAR 62 V. Bargmann, Rev.Mod.Phys., 34, 829, (1962).

BAR 64 V. Bargmann, Journ.Math.Phys., 5, 862, (1964).

BER 65 S.M. Berman, M. Jacob, Phys.Rev., 139B, 1023, (1965).

BOU 58 C. Bouchiat, L. Michel, Nucl.Phys., 5, 416, (1958).

CMN 68 G. Cohen-Tannoudji, A. Morel, H. Navelet , Kinematical singularities, crossing matrix and kinematical constraints for two body helicity amplitudes, Ann. of Phys.,46, 239, (1968).

HAL 68 F.R. Halpern, Special relativity and quantum mechanics, (Prentice Hall), (1968).

HEP 63 K. Hepp, Helv.Phys.Acta, 36, 355, (1963).

JAC 59 M. Jacob, G.C. Wick, Ann. of Phys., 7, 404, (1959).

JOO 62 H. Joos, Fortschritte der Physik, 10, 65, (1962).

KAH 60 T. Kahan, Théorie des groupes en physique classique et quantique, (Dunod), (1960).

KOT 66 A. Kotanski, Acta Phys.Polonica, 29,699, (1966); 30, 629, (1966).

MAC 62 A.J. MacFarlane, Journ.Math.Phys., 3, 1116, (1962).

MAK 55 G.W. Mackey, Theory of group representations, Notes, Department of Mathematics, University of Chicago, (1955).

MES 60 A. Messiah, Mécanique Quantique, (Dunod), (1960).

MIC 58 L. Michel, Cours sur la théorie des groupes, Ecole d'Eté de Varenne, (1958).

MIN 68 P. Minnaert, Description relativiste de la polarisation des particules de spin quelconque, Analyse de la matrice densité de spin, Thèse Orsay A.365, (1968).

MOU 64 P. Moussa, R. Stora, Some remarks on the product of irreductible representations of the inhomogeneous Lorentz group, Lectures in Theoretical Physics, Vol VII A, (University of Colorado Press), Boulder (1964).

MOU 66 P. Moussa, R. Stora, Angular analysis of elementary particle reactions, Lectures given at Hercegnovi International School of Elementary Particle Physics, (September 1966).

NAI 62 M. A. Naimark, Les représentations linéaires du groupe de Lorentz, (Dunod), (1962).

STA 62 H.P. Stapp, Phys.Rev., 125, 2139, (1962).

STR 64 R.F. Streater, A.S. Wightman, PCT, spin and statistics, and all that, (Benjamin), (1964).

WIG 39 E.P. Wigner, Ann. of Math., 40, 149, (1939).

WIG 59 E.P. Wigner, Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra, (Academic Press), (1959).

WIL 63 Williams, Rapport UCRL-11113, (1963), Construction of invariant scalar amplitudes without kinematical singularities of arbitrary spin non zero mass two body scattering processes.

WIT 60 A.S. Wightman, "L'invariance dans la mécanique quantique relativiste", dans : Relations de dispersion et particules élémentaires, (Hermann), (1960).

ZWA 65 D. Zwanziger, Invariant amplitudes for massless particules and universal electromagnetic coupling, Lectures in Theoretical Physics, Vol VII A, (University of Colorado Press), Boulder, (1964).

ZWA 64 D. Zwanziger, Phys. Rev., 133B, 1036, (1964).

DEUXIEME PARTIE

PROPRIETES ANALYTIQUES DES AMPLITUDES D'HELICITE A DEUX CORPS POUR DES REACTIONS CONCERNANT DES PARTICULES DE MASSE NULLE

INTRODUCTION

Dans la première partie de notre travail, nous avons donné quelques propriétés des amplitudes d'hélicité qui furent introduites pour la première fois par Jacob et Wick.

Ces amplitudes semblent particulièrement bien adaptées à l'étude des phénomènes de hautes énergies. C'est pour elles, en particulier, qu'il semble commode de conjecturer les comportements à la Regge qui fournissent, à l'heure actuelle, la trame des études phénoménologiques des interactions fortes à hautes énergies.

Les amplitudes d'hélicité se trouvent cependant avoir un défaut majeur : elles possèdent des singularités dues à l'invariance relativiste,que nous appellerons singularités cinématiques.

Le but du papier que nous présentons ici est de résoudre trois problèmes différents qui se posent lorsque l'on utilise les amplitudes d'hélicité :

1°) Extraire les singularités cinématiques des amplitudes d'hélicité à deux corps, pour des réactions comportant une, deux ou trois particules de masse nulle.

2°) Dériver une matrice de croisement permettant d'exprimer les amplitudes d'hélicité correspondant à une réaction dans la voie s :

$$1 + 2 \longrightarrow 3 + 4$$

en fonction des amplitudes d'hélicité correspondant à une réaction dans la voie t :

$$\bar{4} + 2 \longrightarrow 3 + \bar{1}$$

3°) Ecrire les contraintes cinématiques que doivent satisfaire ces amplitudes pour des valeurs particulières de l'énergie (dans la voie s) ou du transfert (dans la voie t).

Notre méthode pour trouver les singularités cinématiques est tout à fait analogue à celle utilisée par Cohen-Tannoudji, Morel et Navelet. Elle consiste à écrire les amplitudes d'hélicité comme combinaison linéaire des amplitudes de Joos, les coefficients étant des fonctions de s et de t :

$$M_{\lambda_3 \lambda_4 \lambda_1 \lambda_2}(s,t) = C^{\ell_1 \ell_2}_{\lambda_3 \lambda_4 \lambda_1 \lambda_2} \; a_{\ell_1 \ell_2}(s,t)$$

Les singularités cinématiques seront donc celles des coefficients $C^{\ell_1 \ell_2}_{\lambda_3 \lambda_4 \lambda_1 \lambda_2}$.

Un tel développement s'obtient facilement à l'aide de l'expression des amplitudes d'hélicité en fonction des amplitudes spinorielles et du développement de ces amplitudes spinorielles en fonction des amplitudes invariantes après s'être servi de la propriété de covariance des amplitudes spinorielles.

Si nous remarquons que :

$$M_{\lambda_3 \lambda_4 \lambda_1 \lambda_2}(s,t) = \sum_{i=1}^{4} \pi \; D^{S_i}(\Lambda L_{12}(i))^{A_i}{}_{\lambda_i} \; \mathfrak{M}(\Lambda p_i)$$

nous voyons qu'il est possible, suivant la singularité et le cas de masse étudié, de choisir une transformation de Lorentz Λ qui permette de simplifier le calcul.

En particulier, nous prendrons chaque fois une transformation Λ telle que les quadrivecteurs Λp_i soient sans singularités au voisinage de la valeur de s étudiée. Cette méthode nous permettra de déduire les singularités cinématiques des amplitudes d'hélicité dans tous les cas de masse et de spin.

Le but de la deuxième section est de trouver une relation entre les amplitudes $M^s_{\lambda_3 \lambda_4 \lambda_1 \lambda_2}(s,t)$ de la voie s correspondant à la réaction :

$1 + 2 \longrightarrow 3 + 4$ impulsions p_i hélicité λ_i

et les amplitudes d'hélicité $M^t_{\lambda'_3 \lambda'_4 \lambda'_1 \lambda'_2}(s,t)$ de la voie t correspondant à la réaction :

$\bar{4} + 2 \longrightarrow 3 + \bar{1}$ impulsions q_i hélicité λ'_i

Ces amplitudes d'hélicité s'expriment respectivement en fonction des amplitudes spinorielles :

$\mathfrak{M}_{A_3 A_4 A_1 A_2}(p_i)$ définie dans S^+

$\mathfrak{M}_{A_3 A_4 A_1 A_2}(q_i)$ définie dans T^+

Il suffit donc de prolonger ces deux amplitudes spinorielles du domaine S^+ (resp. T^+) dans le domaine T^+ (resp. S^+) pour obtenir le résultat désiré.

Pour cela, nous allons supposer que les propriétés de prolongement des amplitudes spinorielles qui ont été prouvées par Bros, Epstein et Glaser[6] dans le cas de quatre particules massives, sont encore valables quand des

Analyticity Properties of Two-Body Helicity Amplitudes for Reactions Involving Massless Particles.

J. P. Ader and M. Capdeville

Laboratoire de Physique Théorique - Bordeaux (*)

H. Navelet

CEN - Saclay (**)

(ricevuto l'8 Gennaio 1968)

Summary. — Taking into account gauge conditions, helicity amplitudes for processes involving massless particles are expressed via the spinor amplitudes in terms of the Joos invariant amplitudes which have been shown to be free from kinematical singularities if at least one particle is massive. This procedure allows us to analyse the kinematical singularities of helicity amplitudes and separate them out, which results in the definition of regularized helicity amplitudes. A crossing matrix for helicity amplitudes is written down, which corresponds to a well-defined crossing path for spinor amplitudes. Such a path is assumed to exist when massless particles are involved. It is shown that this matrix can be obtained from the matrix for the massive case by putting some masses equal to zero. Kinematical constraints which generalize to the case of arbitrary spin relations which must hold between helicity amplitudes at some values of the energy variable in $\gamma\pi \to N\overline{N}$, $\gamma K \to \Lambda\overline{N}$ reactions, appear as a consequence of the existence of poles in the crossing matrix between regularized helicity amplitudes.

1. – Introduction.

An important problem in Reggeizing helicity amplitudes is to find a combination of these amplitudes in the t-channel, free from kinematical singu-

(*) *Postal address*: Laboratoire de Physique Théorique, Chemin du Solarium 33, Gradignan.

(**) *Postal address*: Service de Physique Théorique, CEN Saclay, B.P. no. 2, 91, Gif-sur-Yvette.

larities and zeros. The general solution of this problem has been recently given by COHEN-TANNOUDJI, MOREL and NAVELET (C.-T.M.N.) [1], for two-body reactions involving massive particles. They obtain a general recipe to construct what they call « regularized helicity amplitudes » (RHA), which they prove to be free from any kinematical branch point, pole or zero (with an exception of a BF→BF reaction). However, the RHA are not all linearly independent: there exist some relations between different RHA for particular values of the c.m. energy squared. These relations are the now well-known « constraints » which put important restrictions on any reasonable assumption the problem of Reggeizing amplitudes. However all these results are proved for massive particles only.

In this paper we want to obtain similar results in the case of two-body reactions involving massless particles of arbitrary spin. Indeed a special study is necessary in order to take properly into account gauge invariance for massless particles.

In Sect. 2, we first carefully define the spinor states of a zero mass particle; spinor amplitudes are defined, in our case, using the two following starting points:

a) The work of WILLIAMS [2] who has shown that the Joos expansion [3,4] of spinor amplitudes leads to invariant amplitudes free of kinematical singularities. This expansion is valid (*) whenever one particle at least is massive.

b) The gauge relations for spinor amplitudes: they have been written down by ZWANZIGER [5].

We write then an expansion of helicity amplitudes in terms of invariant amplitudes free of kinematical singularities for processes involving at most three massless particles.

Then the kinematical singularities of the helicity amplitudes are calculated. The method used is the same as that of C.-T.M.N.; it consists in writing the helicity amplitudes as linear combinations of Joos amplitudes, on which gauge conditions have been imposed.

This study is made for reactions involving one, two or three massless parti-

---

[1] G. COHEN-TANNOUDJI, A. MOREL and H. NAVELET: *Kinematical singularities, crossing matrix and kinematical constraints for two-body helicity amplitudes, Ann. Phys.*, 46, 239 (1968).

[2] D. N. WILLIAMS: UCRL (11113), *Construction of invariant scalar amplitudes without kinematical singularities for arbitrary spin, nonzero mass two body scattering processes.*

[3] H. JOOS: *Forts. der Phys.*, 10, 65 (1962).

[4] K. HEPP: *Helv. Phys. Acta*, 36, 355 (1963).

(*) This can be seen from the paper of HEPP [4] (R. STORA: private communication).

[5] D. ZWANZIGER: *Lectures in Theoretical Physics*, vol. 7 a (Boulder, 1964).

cles. The case of four massless particles is treated following a slightly different way. The special mass configurations are considered in the Appendix I.

In Sect. 3, we show how the derivation of the crossing matrix for helicity amplitudes must be modified to include the zero-mass case. For this purpose we assume that the crossing path of BROS, EPSTEIN and GLASER (6) (B.E.G.) is still valid in our case. Indeed, the proof of crossing given by these authors does not apply to massless particles. So it must be considered as an assumption in our work.

Finally in Sect. 4 we obtain kinematical constraints. In Appendix II, our results are explicitly compared with cases in which the relations between invariant and helicity amplitudes are known, so that the kinematical singularities, the crossing matrices and the kinematical constraints can be derived directly.

2. – Kinematical singularities of two body-helicity amplitudes in the case of massless particles.

2·1. *Massless-particle formalism.*

2·1.1. Definition of spinor states. Using the same notations as C.-T.M.N., we recall briefly the definition of spinor states (5,7).

Let $\mathring{p}$ be the lightlike four-vector $(1; 0\,0\,1)$ $(\mathring{p}^2 = 0)$. The polarization operato $W^\mu(\mathring{p})$ (8,9) is such that $W^2(\mathring{p}) = 0$ and $\mathring{p} \cdot W(\mathring{p}) = 0$, so that $W(\mathring{p}) = \lambda \mathring{p}$. ($2\lambda$ is any positive or negative integer.)

We first define the state $|\mathring{p}\lambda\rangle$ which transforms under a Lorentz transformation of the little group g of $\mathring{p}$ according to (*)

$$U(a)|\mathring{p}, \lambda\rangle = D^{|\lambda|}(a)^{\lambda}{}_{\lambda}|\mathring{p}, \lambda\rangle \,.$$

Let now $L(p)$ be the Lorentz transformation which brings

$$\mathring{p}\,, \qquad n_1(\mathring{p}) = (0; 1\,0\,0) \qquad \text{and} \qquad n_2(\mathring{p}) = (0; 0\,1\,0)$$

onto p, $n_1(p)$ and $n_2(p)$ respectively.

---

(6) J. BROS, H. EPSTEIN and V. GLASER: *Comm. Math. Phys.*, **1**, 240 (1965).

(7) P. MOUSSA and R. STORA: *Lectures at Hercegnovi International School, Sept. 1966.* This reference contains a large amount of old and new results about the Lorentz group and its application in reaction involving spins.

(8) J. K. LUBANSKI: *Physica*, 9, 310 (1942).

(9) E. WIGNER: *Ann. Math.*, 40, 149 (1939).

(*) λ characterizes the considered massless state. In the following it is always taken fixed (no summation). For any other index (μ, ν etc.) we adopt the convention that $X^\mu{}_\nu A_\mu = \sum_{\mu=-|\lambda|}^{\mu=|\lambda|} X^\mu{}_\nu A_\mu$.

We define the state $|p, L(p), \lambda\rangle$ by

$$U(L(p))|\mathring{p}, \lambda\rangle = |p, L(p), \lambda\rangle \qquad \text{with } \langle p', L(p'), \lambda'|p, L(p), \lambda\rangle = 2\omega\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\delta_{\lambda\lambda'}.$$

One verifies that this state transforms under a Lorentz transformation Λ by

$$U(\Lambda)|p, L(p), \lambda\rangle = D^{|\lambda|}\big(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\big)^{\lambda}{}_{\lambda}|\Lambda p, L(\Lambda p), \lambda\rangle\,. \tag{2.1}$$

Since $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ belongs to the little group g

$$L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \text{ takes on the form } \begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ Z & e^{\frac{-i\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

and

$$\big(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\big)^{\dagger-1} \text{ the form } \qquad \begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} & -Z^* \\ 0 & e^{\frac{-i\theta}{2}} \end{pmatrix}.$$

It follows that (*)

$$\begin{aligned} D^{|\lambda|}\big(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\big)^{\lambda}{}_{\mu} &= \delta_{\lambda\mu} D^{|\lambda|}\big(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\big)^{\lambda}{}_{\lambda} \qquad \text{for } \lambda > 0, \\ D^{|\lambda|}\Big(\big(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\big)^{\dagger-1}\Big)^{\lambda}{}_{\mu} &= \delta_{\lambda\mu} D^{|\lambda|}\big(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\big)^{\lambda}{}_{\lambda} \qquad \text{for } \lambda < 0. \end{aligned}$$

Equation (2.1) now reads

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|p, L(p), \lambda\rangle\,\delta_{\lambda\mu} &= D^{|\lambda|}\big(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\big)^{\lambda}{}_{\mu}|L(\Lambda p), \Lambda p, \lambda\rangle \\ &= D^{|\lambda|}\big(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\big)^{\nu}{}_{\mu}|L(\Lambda p), \Lambda p, \lambda\rangle\,\delta_{\lambda\nu} \qquad \text{for } \lambda > 0, \\ &= D^{|\lambda|}\big(L^{\dagger}(\Lambda p)\Lambda^{\dagger-1}L^{\dagger-1}(p)\big)^{\nu}{}_{\mu}|L(\Lambda p), \Lambda p, \lambda\rangle\,\delta_{\lambda\nu} \qquad \text{for } \lambda < 0. \end{aligned}$$

Furthermore we define the $2|\lambda|+1$ states $|p, L(p), \lambda, \mu\rangle = |p, L(p), \lambda\rangle\,\delta_{\lambda\mu}$.

The effect of a Lorentz transformation Λ acting on these states is simply expressed by

$$\begin{cases} U(\Lambda)|p, L(p), \lambda, \mu\rangle = D^{|\lambda|}\big(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\big)^{\nu}{}_{\mu}|L(\Lambda p), \Lambda p, \lambda, \nu\rangle \qquad \text{for } \lambda > 0 \\ \text{and} \\ U(\Lambda)|p, L(p), \lambda, \mu\rangle = D^{|\lambda|}\big(L^{\dagger}(\Lambda p)\Lambda^{\dagger-1}L^{\dagger-1}(p)\big)^{\nu}{}_{\mu}|L(\Lambda p), \Lambda p, \lambda, \nu\rangle \text{ for } \lambda < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

(*) In the matrix element $D(a)^{\alpha}{}_{\beta}$, the index α (respectively β) labels the line (respectively the column).

Now if $L'(p)$ is any Lorentz transformation such that $L'(p)\,\mathring{p} = p$, one finds

$$|p, L'(p), \lambda, \mu\rangle = D^{|\lambda|}(L^{-1}(p)L'(p))^{\nu}{}_{\mu}|p, L(p), \lambda, \nu\rangle \qquad \text{for } \lambda > 0$$

and

$$|p, L'(p), \lambda, \mu\rangle = D^{|\lambda|}(L^{\dagger}(p)L'^{\dagger-1}(p))^{\nu}{}_{\mu}|p, L(p), \lambda, \nu\rangle \qquad \text{for } \lambda < 0\,,$$

so that the states

$$(2.3)\quad \begin{cases} |p, -|\lambda|, \tilde{A}\rangle = D^{|\lambda|}(L^{-1}(p))^{\mu}{}_{\Delta}|p, L(p), \lambda, \mu\rangle = \\ \qquad\qquad = D^{|\lambda|}(L^{-1}(p))^{\lambda}{}_{\Delta}|p, L(p), \lambda\rangle \qquad \text{for } \lambda > 0 \\ \text{and} \\ |p, -|\lambda|, \tilde{A}\rangle = D^{|\lambda|}(L^{\dagger}(p))^{\mu}{}_{\Delta}|p, L(p), \lambda, \mu\rangle = \\ \qquad\qquad = D^{|\lambda|}(L^{\dagger}(p))^{\lambda}{}_{\Delta}|p, L(p), \lambda\rangle \qquad \text{for } \lambda < 0 \end{cases}$$

are independent of the particular Lorentz transformation which brings $\mathring{p}$ onto p. Such states are called spinor states [3]. According to eqs. (2.2) they transform simply under a Lorentz transformation, namely (*)

$$U(\Lambda)|p, +|\lambda|, A\rangle = D^{|\lambda|}(\Lambda)^{A'}{}_{A}|\Lambda p, +|\lambda|, A'\rangle$$

and

$$(2.4)\qquad U(\Lambda)|p, -|\lambda|, \tilde{A}\rangle = D^{|\lambda|}(\Lambda^{\dagger-1})^{A'}{}_{A}|\Lambda p, -|\lambda|, \tilde{A}'\rangle\,.$$

It is also useful to define two other types of states by

$$|p, +|\lambda|, \tilde{A}\rangle = D^{|\lambda|}(\varepsilon)^{A'}{}_{A}|p, +|\lambda|, A'\rangle$$

and

$$|p, -|\lambda|, \dot{A}\rangle = D^{|\lambda|}(\varepsilon^{-1})^{A'}{}_{A}|p, -|\lambda|, \tilde{A}'\rangle$$

which under a Lorentz transformation Λ transform respectively according to

$$(2.5)\quad \begin{cases} U(\Lambda)|p, +|\lambda|, \tilde{A}\rangle = D^{|\lambda|}(\Lambda^{T-1})^{A'}{}_{A}|\Lambda p, +|\lambda|, \tilde{A}'\rangle\,, \\ U(\Lambda)|p, -|\lambda|, \dot{A}\rangle = D^{|\lambda|}(\Lambda^{*})^{A'}{}_{A}|\Lambda p, -|\lambda|, \dot{A}'\rangle\,. \end{cases}$$

(*) The indices + and — which label the two different kinds of spinor states correspond to the sign of the helicity state. They are connected only if parity is conserved. In this case, the parity operation reads $U(\pi)|p, +|\lambda|, A\rangle = \eta_{\pi}|\tilde{p}, -|\lambda|, \tilde{A}\rangle$, with $\tilde{p} = (p_0, -\boldsymbol{p})$.

With the corresponding bras we have the following scalar products:

for $\lambda > 0$,

$$\langle p', +|\lambda'|, A'|p, +|\lambda|, A\rangle =$$
$$= D^{|\lambda'|}(L^{+-1}(p'))^{A'}{}_{\lambda'} D^{|\lambda|}(L^{-1}(p))^{\lambda}{}_{A} \langle \lambda', p', L(p')|\lambda, p, L(p)\rangle =$$
$$= D^{|\lambda|}\left(L^{+-1}(p)\frac{1+\sigma_z}{2}L^{-1}(p)\right)^{A'}{}_{A} 2\omega\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\delta_{|\lambda|,|\lambda'|} = D^{|\lambda|}\left(\frac{\tilde{\sigma}p}{2}\right)^{A'}{}_{A} 2\omega\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\delta_{|\lambda|,|\lambda'|}$$

and for $\lambda < 0$,

$$\langle p', -|\lambda'|, \tilde{A}'|p, -|\lambda|, \tilde{A}\rangle = D^{|\lambda|}\left(\frac{\sigma p}{2}\right)^{A'}{}_{A} 2\omega\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\delta_{|\lambda|,|\lambda'|}\,.$$

2·1.2. Gauge invariance. From eqs. (2.3), we deduce that the spinor states $|p, +|\lambda|, A\rangle$ (respectively $|p, -|\lambda|, \tilde{A}\rangle$) are not independent. The purpose of this Section is to find the relations between these spinor states.

By inversion of eqs. (2.3), we obtained

$$(2.6)\qquad \begin{cases} D^{|\lambda|}(L(p))^{A}{}_{\mu}|p, +|\lambda|, A\rangle = \delta_{\lambda\mu}|p, L(p), \lambda\rangle & \text{for } \lambda > 0\,, \\ D^{|\lambda|}(L^{+-1}(p))^{A}{}_{\mu}|p, -|\lambda|, \tilde{A}\rangle = \delta_{\lambda\mu}|p, L(p), \lambda\rangle & \text{for } \lambda < 0\,. \end{cases}$$

More tractable gauge conditions can be obtained by eliminating $|p, L(p), \lambda\rangle$ in eqs. (2.3). For $\lambda > 0$

$$|p, +|\lambda|, A\rangle = D^{|\lambda|}(L^{-1}(p))^{\lambda}{}_{A}|p, L(p), \lambda\rangle =$$
$$= D^{|\lambda|}(L^{-1}(p))^{\lambda}{}_{A} D^{|\lambda|}(L(p))^{A'}{}_{\lambda}|p, +|\lambda|, A'\rangle =$$
$$= D^{|\lambda|}(L^{-1}(p))^{\mu}{}_{A} D^{|\lambda|}(L(p))^{A'}{}_{\nu}\delta_{|\lambda|\mu}\delta_{|\lambda|\nu}|p, +|\lambda|, A'\rangle =$$
$$= D^{|\lambda|}\left(L(p)\left(\frac{1+\sigma_z}{2}\right)L^{-1}(p)\right)^{A'}{}_{A}|p, +|\lambda|, A'\rangle =$$
$$= D^{|\lambda|}\left(L(p)L^{+}(p)L^{+-1}(p)\frac{1+\sigma_z}{2}L^{-1}(p)\right)^{A'}{}_{A}|p, +|\lambda|, A'\rangle\,.$$

Let us define e through $\sigma e = L(p)L^{+}(p)$. (This definition means that the four-vector $\overset{0}{e} = (1; 000)$ is brought by $L(p)$ onto the four-vector e.)

We obtain

$$e.p = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,[L(p)(1+\sigma_z)L^{-1}(p)] = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(1+\sigma_z) = 1\,,$$

and the gauge conditions read

$$|p, +|\lambda|, A\rangle = D^{|\lambda|}\left(\frac{\sigma\cdot\tilde{\sigma}p}{2}\right)^{A'}_{A} |p, +|\lambda|, A'\rangle . \tag{2.7}$$

Similarly

$$|p, -|\lambda|, \dot{A}\rangle = D^{|\lambda|}\left(\frac{\tilde{\sigma}\cdot\sigma p}{2}\right)^{\dot{A}'}_{\dot{A}} |p, -|\lambda|, \dot{A}'\rangle ,$$

$$|p, +|\lambda|, \tilde{A}\rangle = D^{|\lambda|}\left(\varepsilon^{-1}\,\frac{\sigma\cdot\tilde{\sigma}p}{2}\,\varepsilon\right)^{\dot{A}'}_{\dot{A}} |p, +|\lambda|, \tilde{A}'\rangle ,$$

$$|p, -|\lambda|, \dot{A}\rangle = D^{|\lambda|}\left(\varepsilon\,\frac{\tilde{\sigma}\cdot\sigma p}{2}\,\varepsilon^{-1}\right)^{\dot{A}'}_{\dot{A}} |p, -|\lambda|, \dot{A}'\rangle .$$

Since $|p, +|\lambda|, A\rangle$ is independent of $L(p)$, it is possible to prove [5] that the eqs. (2.7) are valid for any four-vector e satisfying the conditions $ep = 1$, $e^2 \neq 0$.

2·1.3. Spinor amplitudes.

A) Definition and gauge conditions. In a two-body reaction involving one, two or three massless particles, it is useful to define spinor amplitudes $\mathscr{M}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_3, p_4; p_1, p_2)$ enjoying the covariance property

$$\mathscr{M}_{A_i}(p_i) = \prod_i D^{s_i}(\Lambda)^{A'_i}_{A_i}\mathscr{M}_{A'_i}(\Lambda p_i) . \tag{2.8}$$

Let us treat for instance the case where only particle 1 is massless

a) $\lambda_1 > 0$:

$$\mathscr{M}^{+}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_3, p_4; p_1, p_2) = \langle p_3, s_3, \dot{A}_3; p_4, s_4, \dot{A}_4|T|p_1, +|\lambda_1|, A_1; p_2, s_2, A_2\rangle$$

satisfies the covariance property (2.8).

b) $\lambda_1 < 0$. In this case we first define

$$\mathscr{M}_{A_3A_4;\tilde{A}_1A_2}(p_3, p_4; p_1, p_2) = \langle p_3, s_3, \dot{A}_3; p_4, s_4, \dot{A}_4|T|p_1, -|\lambda_1|, \tilde{A}_1; p_2, s_2, A_2\rangle ,$$

which does not obey the covariance property (2.8)

$$(U(\Lambda)|p_1, -|\lambda_1|, \tilde{A}_1\rangle = D^{|\lambda|}(\Lambda^{\dagger-1})^{\dot{A}_1}_{\dot{A}'_1}|\Lambda p_1, -|\lambda_1|, \tilde{A}'_1\rangle) .$$

But the amplitude

$$\mathscr{M}^{-}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_3p_4;\,p_1p_2)=D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\tilde{\sigma}p_3}{m_3}\right)^{A_1'}_{A_1}\mathscr{M}_{A_3A_4;\tilde{A}_1'A_2}(p_3p_4;\,p_1p_2)$$

does obey the covariance property (2.8). The proof is the following:

$$\mathscr{M}_{A_3A_4;\tilde{A}_1A_2}(p_i)=D^{|\lambda_1|}(\Lambda^{\dagger-1})^{A_1'}_{\ A_1}D^{s_2}(\Lambda)^{A_2'}_{\ A_2}D^{s_3}(\Lambda)^{A_3'}_{\ A_3}D^{s_4}(\Lambda)^{A_4'}_{\ A_4}\mathscr{M}_{A_3'A_4';\tilde{A}_1'A_2'}(\Lambda p_i)\,,$$

so that

$$\mathscr{M}^{-}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_i)=D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma(\Lambda p_3)}{m_3}\Lambda^{\dagger-1}\frac{\tilde{\sigma}p_3}{m_3}\right)^{A_1'}_{A_1}D^{s_3}(\Lambda)^{A_3'}_{\ A_3}D^{s_3}(\Lambda)^{A_3'}_{\ A_3}D^{s_4}(\Lambda)^{A_4'}_{\ A_4}\mathscr{M}^{-}_{A_3'A_4';A_1'A_2'}(\Lambda p_i)$$

but

$$\frac{\sigma(\Lambda p_3)}{m_3}=\Lambda\frac{\sigma p_3}{m_3}\Lambda^{\dagger},$$

then

$$\frac{\sigma(\Lambda p_3)}{m_3}\Lambda^{\dagger-1}\frac{\tilde{\sigma}p_3}{m_3}=\Lambda\frac{\sigma p_3}{m_3}\Lambda^{\dagger}\Lambda^{\dagger-1}\frac{\tilde{\sigma}p_3}{m_3}=\Lambda\,.$$

It is easy to define also two spinor amplitudes $\mathscr{M}^{\pm}_{\{A_i\}}$ enjoying the covariance property (2.8) in the case $m_4=0$

a) $\lambda_4<0$:

$$\mathscr{M}^{-}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_3,\,p_4;\,p_1,\,p_2)=\langle p_3,\,s_3,\,A_3;\,p_4,\,-|\lambda_4|,\,\tilde{A}_4|T|p_1,\,s_1,\,A_1;\,p_2,\,s_2,\,A_2\rangle\,.$$

b) $\lambda_4>0$:

$$\mathscr{M}^{+}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_3p_4;\,p_1p_2)=D^{|\lambda_4|}\left(\frac{\tilde{\sigma}p_3}{m_3}\right)^{A_4'}_{A_4}\langle p_3,s_3,A_3;\,p_4,+|\lambda_4|,\tilde{A}_4'|T|p_1\,s_1,A_1;p_2,s_2,A_2\rangle.$$

Now, these spinor amplitudes are subject to the gauge conditions (2.7). For instance, if only particle 1 is massless, we can choose $e=p_3/(p_3\cdot p_1)$ $(e\cdot p_1=1)$. Then

a) $\lambda_1>0$:

$$\mathscr{M}^{+}_{A_3A_4;\,A_1A_2}(p_i)=D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma p_3\cdot\tilde{\sigma}p_1}{2(p_3\cdot p_1)}\right)^{A_1'}_{A_1}\mathscr{M}^{+}_{A_3A_4;A_1'A_2}(p_i)\,.$$

b) $\lambda_1<0$:

from eqs. (2.7) we get

$$\mathscr{M}^{-}_{A_3A_4;\tilde{A}_1A_2}(p_i)=D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\tilde{\sigma}p_3\cdot\sigma p_1}{2(p_3\cdot p_1)}\right)^{A_1'}_{A_1}\mathscr{M}^{-}_{A_3A_4;\tilde{A}_1'A_2}(p_i)\,,$$

which implies

$$\mathscr{M}^{-}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(p_i) = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma p_3}{m_3}\,\frac{\tilde{\sigma}p_3\cdot\sigma p_1}{2(p_3\cdot p_1)}\cdot\frac{\tilde{\sigma}p_3}{m_3}\right)^{\Lambda_1'}_{\Lambda_1}\mathscr{M}^{-}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1'\Lambda_2},$$

i.e.

$$\mathscr{M}^{-}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(p_i) = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma p_1\cdot\tilde{\sigma}p_3}{2(p_3\cdot p_1)}\right)^{\Lambda_1'}_{\Lambda_1}\mathscr{M}^{-}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1'\Lambda_2}(p_i)\,.$$

Analogous results hold if only particle 4 is massless

a) $\lambda_4 < 0$:

$$\mathscr{M}^{-}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(p_i) = D^{|\lambda_4|}\left(\frac{\sigma p_3\cdot\tilde{\sigma}p_4}{2(p_3\cdot p_4)}\right)^{\Lambda_4'}_{\Lambda_4}\mathscr{M}^{-}_{\Lambda_3\Lambda_4';\Lambda_1\Lambda_2}(p_i)\,.$$

b) $\lambda_4 > 0$:

$$\mathscr{M}^{+}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(p_i) = D^{|\lambda_4|}\left(\frac{\sigma p_3\cdot\tilde{\sigma}p_4}{2(p_3\cdot p_4)}\right)^{\Lambda_4'}_{\Lambda_4}\mathscr{M}^{+}_{\Lambda_3\Lambda_4';\Lambda_1\Lambda_2}(p_i)\,.$$

B) Analyticity properties. According to ZWANZIGER [5] and STORA [10] the Joos expansions of the spinor amplitudes satisfying the covariance property and the arguments of HEPP [4] and WILLIAMS [2] are valid provided that at least one mass, say m_3, is different from zero.

For instance if particle 1 is massless, with helicity $+|\lambda_1|$, and if $p_3^2 \neq 0$,

$$(2.9)\quad \mathscr{M}^{+}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(p_i) = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma p_3\cdot\tilde{\sigma}p_1}{2(p_3\cdot p_1)}\right)^{\Lambda_1'}_{\Lambda_1}\sum_{l_1+l_2=J+1}(J;\mathscr{J};|\lambda_1|,s_2,s_3,s_4)^{\Lambda}_{\Lambda_1'\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4}a_{l_1l_2}(s,t)\cdot$$
$$\cdot(Jl_1l_2)_{\Lambda}{}^{\mathscr{M}_1\mathscr{M}_2}Y^{l_1}_{\mathscr{M}_1}(e(p_1,p_3))\,Y^{l_2}_{\mathscr{M}_2}(e(p_2,p_3))\,.$$

$a_{l_1l_2}(s,t)$ is the Joos invariant amplitude (cf. formula (2.3) of ref. [1]).

2·1.4. Helicity states and amplitudes for two-body reactions involving massless particles.

A) Helicity states for massive particles. We briefly recall some definitions

$$(2.10)\qquad |p_i, L_{12}(i), s_i, \lambda_i\rangle = D^{s_i}(L_{12}(i))^{\Lambda_i}{}_{\lambda_i}|p_i, s_i, \Lambda_i\rangle\,,$$

where

$$L_{12}(i)\begin{Vmatrix}\mathring{t}\\ \mathring{n}_2\\ \mathring{n}_3\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\dfrac{p_i}{m_i}\\ W\\ h_{12}(i)\end{Vmatrix} \qquad \text{and} \qquad W_\mu = \frac{2\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}p_1^\nu p_2^\varrho p_3^\sigma}{\sqrt{\Phi(s,t)}}\,.$$

$\Phi(s,t)=0$ is the equation of the boundary of the physical region.

---

[10] R. STORA: private communication.

B) Helicity states for a massless particle in the c.m. system. Following the definitions (2.3)

$$(2.11)\qquad \begin{cases} |p_i, L_{12}(i), \lambda_i\rangle = D^{|\lambda_i|}(L_{12}(i))^{A_i}{}_{\lambda_i}|p_i, +|\lambda_i|, A_i\rangle & \text{for } \lambda_i > 0\,, \\ |p_i, L_{12}(i), \lambda_i\rangle = D^{|\lambda_i|}(L_{12}^{\dagger -1}(i))^{A_i}{}_{\lambda_i}|p_i, -|\lambda_i|, \tilde{A}_i\rangle & \text{for } \lambda_i < 0\,, \end{cases}$$

where

$$L_{12}(i)\begin{Bmatrix} \mathring{p} \\ \mathring{n}_1 \\ [illegible] \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} p_1 \\ n_1(p_1) \\ [illegible] \end{Bmatrix}$$

MOUSSA and STORA (7) have shown that it is possible to write this Lorentz transformation in the following form:

a) $m_1 = 0$,

$$(2.12)\qquad L_{12}(1) = \Omega(q_{12} \leftarrow n_3(P))\,[\omega_1 \hat{P} + |q_{12}| n_3(P) \leftarrow \hat{P} + n_3(P)]\,[P]\,,$$

where $[P]$ is an arbitrary Lorentz transformation which takes $\mathring{t}$ onto $(P/\sqrt{\ }\ [illegible]$.

ω_1 is the massless particle barycentric energy, q_{12} is the four-vector in the 2 plane p_1, p_2 orthogonal to P, $(q_{12}\cdot P = 0;\ q_{12}^2 = -1)$.

$[\omega_1 \hat{P} + |q_{12}| n_3(P) \leftarrow \hat{P} + n_3(P)]$ is the pure Lorentz transformation acting in the two plane $(\hat{P}, n_3(P) = [P]\mathring{n}_3)$ and transforming $\hat{P} + n_3(P)$ (lightlike) into $\omega_1 \hat{P} + |q_{12}| n_3(P)$.

$\Omega[q_{12} \leftarrow n_3(P)]$ is a Lorentz transformation taking $n_3(P)$ onto q_{12} in the two plane $(n_3(P), q_{12})$.

b) $m_2 = 0$.

$$(2.13)\qquad L_{12}(2) = \Omega[q_{12} \leftarrow n_3(P)]\,[\omega_2 \hat{P} - |q_{12}| n_3(P) \leftarrow \hat{P} - n_3(P)]\,[P]\,Y\,,$$

where Y is a rotation through an angle π around the $\mathring{n}_2$-axis.

C) Helicity amplitudes. Helicity amplitudes can be expressed as function of spinor amplitudes $\mathscr{M}^{\pm}_{(A_i)}(p_i)$ using the definitions (2.10), (2.11) of the helicity states and taking into account the gauge-invariance conditions for spinor amplitudes.

For instance, if $m_1 = 0$:

a) $\lambda_1 > 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma p_3\cdot\tilde{\sigma} p_1}{2(p_3\cdot p_1)} L_{12}(1)\right)^{A_1}{}_{\lambda_1} D^{s_2}(L_{12}(2))^{A_2}{}_{\lambda_2} D^{s_3}(L_{12}(3)\varepsilon)^{A_3}{}_{\lambda_3}\,\cdot$$

[illegible]

b) $\lambda_1 < 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{m_3 \cdot \sigma p_1}{2(p_3 \cdot p_1)} L_{12}^{\dagger -1}(1)\right)^{A_1}_{\lambda_1} D^{s_3}(L_{12}(2))^{A_3}{}_{\lambda_3} D^{s_3}(L_{12}(3)\varepsilon)^{A_3}{}_{\lambda_3} \cdot$$
$$\cdot D^{s_4}(L_{12}(4)\varepsilon)^{A_4}{}_{\lambda_4} \mathscr{M}^{-}_{A_3 A_4; A_1 A_2}(p_i) \,.$$

But, by definition of $L_{12}(1)$,

$$L_{12}(1)(1 - \sigma_z) L_{12}^{\dagger}(1) = \sigma p_1 \,,$$
$$L_{12}^{\dagger -1}(1)(1 + \sigma_z) L_{12}^{-1}(1) = \tilde{\sigma} p_1 \,.$$

Then

$$\tilde{\sigma} p_1 L_{12}(1) = L_{12}^{\dagger -1}(1)(1 + \sigma_z)$$

and

$$\sigma p_1 L_{12}^{\dagger -1}(1) = L_{12}(1)(1 - \sigma_z) \,,$$

which proves that

$$D^{|\lambda_1|}\left(\frac{m_3}{2p_3 \cdot p_1} \sigma p_1 L_{12}^{\dagger -1}(1)\right)^{A_1}_{\lambda_1} = \delta_{\lambda_1 - |\lambda_1|} D^{|\lambda_1|}\left(\frac{m_3}{2(p_3 \cdot p_1)} L_{12}(1)\right)^{A_1}_{\lambda_1}$$

and

$$D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma p_3 \cdot \tilde{\sigma} p_1}{2p_3 \cdot p_1} L_{12}(1)\right)^{A_1}_{\lambda_1} = \delta_{\lambda_1 |\lambda_1|} D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma p_3}{2(p_3 \cdot p_1)} L_{12}^{\dagger -1}(1)\right)^{A_1}_{\lambda_1} .$$

On the other hand, if $m_4 = 0$:

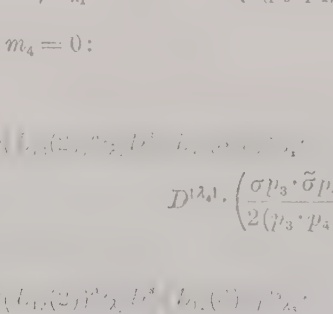
a) $\lambda_4 < 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = D^{s_3}(L_{12}(1))^{A_3}{}_{\lambda_3} D^{s_3}(L_{12}(2)\varepsilon)^{A_3}{}_{\lambda_3} \cdot$$
$$\cdot D^{|\lambda_4|}\left(\frac{\sigma p_3 \cdot \tilde{\sigma} p_4}{2(p_3 \cdot p_4)} L_{12}(4)\varepsilon\right)^{A_4}_{\lambda_4} \mathscr{M}^{-}_{A_3 A_4; A_1 A_2}(p_i) \,.$$

b) $\lambda_4 > 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = D^{s_3}(L_{12}(1))^{A_3}{}_{\lambda_3} D^{s_3}(L_{12}(2)\varepsilon)^{A_3}{}_{\lambda_3} \cdot$$
$$\cdot D^{|\lambda_4|}\left(\frac{m_3 \cdot \sigma p_4}{2(p_3 \cdot p_4)} L_{12}^{\dagger -1}(4)\varepsilon^{-1}\right)^{A_4}_{\lambda_4} \mathscr{M}^{+}_{A_3 A_4; A_1 A_2}(p_i) \,.$$

D) Kinematics of two-body reactions. We now define the notations which will be used throughout this paper for an arbitrary two-body reaction: Fig. 1.



$$
\begin{aligned}
s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 , \\
t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 , \qquad s + t + u = \sum_i m_i^2 , \\
u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 , \\
\mathcal{S}_{ij} &= \sqrt{[s - (m_i + m_j)^2][s - (m_i - m_j)^2]} , \\
\varphi_{ij} &= \sqrt{s - (m_i + m_j)^2} , \qquad \text{« threshold } i,\ j \text{ »} , \\
\psi_{ij} &= \sqrt{s - (m_i - m_j)^2} , \qquad \text{« pseudothreshold } i,\ j \text{ »} ,
\end{aligned}
$$

$$
\Phi(s, t) = stu - s(m_2^2 - m_4^2)(m_1^2 - m_3^2) - t(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) - \\
- (m_1^2 + m_4^2 - m_3^2 - m_2^2)(m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2) ,
$$

$\Phi(s, t) = 0$ is the equation of the boundary of the physical region. $\Phi(s, t)$ is positive inside this physical region.

$$
\begin{cases}
\omega_i = \dfrac{s + m_i^2 - m_j^2}{2\sqrt{s}} & i = 1, 2 \leftrightarrow j = 2, 1 , \\
p_{ij} = \dfrac{\mathcal{S}_{ij}}{2\sqrt{s}} & i = 3, 4 \leftrightarrow j = 4, 3 .
\end{cases}
$$

$p_{12} = p_{21} = k$ is the c.m. initial momentum,

$p_{34} = p_{43} = p$ is the c.m. final momentum.

$$
\cos\theta_s = \frac{2st + u^2 - s\sum m_i^2 + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{34}} ,
$$

$$
\sin\theta_s = \frac{2\sqrt{s}\sqrt{\Phi(s, t)}}{\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{34}} .
$$

2·2. *Principle of the method.*

2·2.1. We shall say that spin-dependent amplitudes have no kinematical singularities if they have the same analyticity properties as the Joos invariant amplitudes $a_{l_1 l_3}(s, t)$. Our method to find the kinematical singularities of the helicity amplitudes consists in writing them as linear combinations of the Joos invariant amplitudes with coefficients functions of s and t

$$
M_{\{\lambda\}} = \sum_{(l_1, l_3)} C^{l_1 l_3}_{\{\lambda\}}(s, t)\, a_{l_1 l_3}(s, t) . \tag{2.14}
$$

The kinematical singularities will then be the singularities of $C^{l_1 l_3}_{\{\lambda\}}(s, t)$. Let us suppose, for instance, that the C coefficients have a singularity (a square-root

branch point, say) as $s = s_0$; let us suppose moreover that $s = s_0$ is also a dynamical singularity (for instance a threshold). Let

$$M^{\pm}_{\{\lambda\}} = \sum_{(l_1 l_2)} C^{\pm l_1 l_2}_{\{\lambda\}}(s, t)\, a^{\pm}_{l_1 l_2}(s, t)$$

be two determinations of $M_{\{\lambda\}}$. If $\sum C^{\pm l_1 l_2}_{\{\lambda\}} a^{\pm}_{l_1 l_2}$ happen to be determinations of another helicity amplitude $M_{\{\lambda'\}}$ corresponding to other helicities $\{\lambda'\}$, then $F_{\{\lambda\}} = M_{\{\lambda\}} + M_{\{\lambda'\}}$ has no kinematical singularity as $s = s_0$. In fact,

$$\Delta F = F^+ - F^- = \sum (C^+_{\{\lambda\}} + C^-_{\{\lambda\}})(a^+_{l_1 l_2} - a^-_{l_1 l_2}) = \sum \mathscr{C}_{\{\lambda\}} \Delta a_{l_1 l_2}\,,$$

the discontinuity ΔF of F, is a linear combination of the dynamical discontinuities $\Delta a_{l_1 l_2}$, with uniform coefficients $\mathscr{C}_{\{\lambda\}} = C^+_{\{\lambda\}} + C^-_{\{\lambda\}}$.

In order to get expansions of the type (2.14) we use the covariance of the spinor amplitudes (eq. (2.8)) and the expression of the helicity amplitudes as functions of spinor amplitudes. One obtains

$$\mathscr{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = D^{s_3}\big(\Lambda H_{12}(1)\big)^{\Lambda_3}_{\lambda_3} D^{s_3}\big(\Lambda H_{12}(2)\big)^{\Lambda_4}_{\lambda_4} D^{s_3}\big(\Lambda H_{12}(3)\varepsilon\big)^{\Lambda_3}_{\lambda_3} \cdot \tag{2.15}$$
$$\cdot D^{s_4}\big(\Lambda H_{12}(4)\varepsilon\big)^{\Lambda_4}_{\lambda_4} \mathscr{M}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(\Lambda p_3\, \Lambda p_4;\, \Lambda p_1\, \Lambda p_2)\,,$$

where

$$H_{12}(i) = \begin{cases} L_{12}(i) & \text{if } m_i \neq 0\,, \\ +(-)\dfrac{m_k}{2(p_k \cdot p_i)} L_{12}(i) & \text{if } m_i = 0,\ \lambda_i < 0, \quad (\lambda_i > 0)\ i = 1, 2\,(3, 4)\,, \\ \dfrac{\sigma p_i}{2(p_k \cdot p_i)} L^{\dagger -1}_{12}(i) & \text{if } m_i = 0,\ \lambda_i > 0, \quad (\lambda_i < 0)\ i = 1, 2\,(3, 4)\,, \end{cases}$$

for any Lorentz transformation Λ. We finally get an expansion of the type (2.14) by using a Joos expansion of the type (2.9) of

$$\mathscr{M}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(\Lambda p_3\, \Lambda p_4;\, \Lambda p_1\, \Lambda p_2)\,.$$

As in C-T.M.N., the choice of Λ will be adapted to the study of each singularity, in such a way that this singularity may be factored out as easily as possible.

2·2.2. Explicit choice for Λ. Let us suppose that Λ takes some frame R into the standard frame. First we note that $\Lambda p \cdot \hat{n}_i = \Lambda p \cdot \Lambda n_i(R) = p \cdot n_i(R)$ so that the components of Λp in the standard frame are equal to those of p in the frame R. Secondly, all the frames which we use are such that the centre of mass is at rest ($\boldsymbol{P} = 0$). So we choose in eqs. (2.12), (2.13) $[P] = \Lambda^{-1}$.

TABLE I. – *This Table gives the explicit form B of eq. (2.15) corresponding to frame R_{II}, which is especially convenient for studying kinematical singularities at $s = m_2^2$.*

Frame R_{II}

$t(R) = p/\sqrt{s}$, $\quad n_2(R) = w$, $\quad n_3(R) = q_{34}$

$L_{12}(1) = R_y(-\theta_s) B_1$

$L_{12}(2) = R_y(-\theta_s + \pi) B_2$

$L_{12}(3) = B_3$

$L_{12}(4) = R_y(\pi) B_4$

$R_y(\theta_s) = \exp\left[-i\sigma_y \frac{\theta}{2}\right]$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{k}} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m_2}{\sqrt{s}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\sqrt{s}}{m_2}} \end{pmatrix}.$$

B_3 and B_4 have the following form: $\dfrac{\omega_i + m_i - p_{ij}\sigma_z}{\sqrt{2m_i(\omega_i + m_i)}}$

$L_{12}^{\dagger -1}(1) = R_y(-\theta_s) B_1^{\dagger -1}$

Expansion B

$\lambda_1 < 0$.

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \left[\frac{m_3}{2k(\omega_3 - p\cos\theta)}\right]^{2|\lambda_1|} \sum_{A_1 A_2} (-1)^{s_3-\lambda_3+s_3+\lambda_3} D^{|\lambda_1|}(B_1)^{\lambda_1}{}_{\lambda_1} D^{s_3}(B_2)^{\lambda_3}{}_{\lambda_3} \cdot$$

$$\cdot D^{s_3}(B_3)^{-\lambda_3}{}_{-A_2} D^{s_4}(B_4)^{-\lambda_4}{}_{-\lambda_4} (D^{|\lambda_1|}(-\theta_s))^{A_1}{}_{\lambda_1} (D^{s_4}(-\theta_s))^{A_2}{}_{-\lambda_2} \sum_{t_1, t_2, M_1 - M_2 = A_1 - A_2 - \lambda_3 + \lambda_4}$$

$$\cdot \mathscr{C}' a_{l_1 l_2}(s,t) (k\sin\theta_s)^{|M_1|+|M_2|} (\omega_3 + \varepsilon_1 p)^{|M_1|} (\omega_3 + \varepsilon_2 p)^{|M_2|} P_1'[t, (kp - \omega_3 k\cos\theta_s)] \cdot$$

$$\cdot P_2'[u, (\omega_2 p + \omega_3 k\cos\theta_s)],$$

where: $\mathscr{C}'$ is a numerical coefficient,

ε_1 and ε_2 are the signs of M_1 and M_2,

$P_1'[t, z]$, $P_2'[u, z]$ are polynomials in t and z, and in u and z, respectively.

$\lambda_1 > 0$.

Replace $\left[\dfrac{m_3}{2k(\omega_3 - p\cos\theta)}\right]^{2|\lambda_1|} D^{|\lambda_1|}(B_1)^{\lambda_1}{}_{\lambda_1}$ by $D^{|\lambda_1|}\left(\dfrac{\omega_3 - p\sigma_z}{2k(\omega_3 - p\cos\theta)}\right)^{A_1}{}_{A_1} D^{|\lambda_1|}(B_1^{\dagger -1})^{\lambda_1}{}_{\lambda_1}$

2·3. *General mass case.*

2·3.1. One massless particle. As we have seen before, helicity amplitudes can be expressed in terms of spinor amplitudes by the following formulae:

a) $\lambda_1 < 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = L^{|\lambda_1|}\left(\frac{m_i}{2p_i\cdot p_1} L_{12}(1)\right)^{A_1}{}_{\lambda_1} D^{s_3}(L_{12}(2))^{A_3}{}_{\lambda_3} D^{s_3}(L_{12}(3)\varepsilon)^{A_3}{}_{\lambda_3} \cdot$$

$$\cdot D^{s_4}(L_{12}(4)\varepsilon)^{A_4}{}_{\lambda_4} \mathscr{C}'_{\lambda_3\lambda_4;A_1A_2},$$

b) $\lambda_1 \geq 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma p_i}{2p_i\cdot p_1} L_{12}^{\dagger -1}(1)\right)^{\Delta_1}_{\lambda_1} D^{s_3}(L_{12}(2))^{\Delta_3}{}_{\lambda_3} D^{s_3}(L_{12}(3)\varepsilon)^{\Delta_3}{}_{\lambda_3} \cdot$$

$$\cdot D^{s_4}(L_{12}(4)\varepsilon)^{\Delta_4}{}_{\lambda_4} \cdot \hat{M}^{\pm}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2},$$

where p_i is the four-momentum of one of the massive particles.

i) *Kinematical singularities at* $\Phi(s,t)=0$. If we compare the C-T.M.N. expansion (eq. (2.10) of ref. [1]) and our expansion B valid for one massless particle, we note that the two expansions have the same form apart from some factors regular at $\Phi(s,t)=0$. Hence the C-T.M.N. result holds in this case, namely

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{|\lambda-\mu|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{|\lambda+\mu|} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}, \tag{2.17}$$

where $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ is kinematically regular at $\Phi(s,t)=0$ $\begin{cases} \lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \\ \mu = \lambda_3 - \lambda_4. \end{cases}$

ii) *Kinematical singularities at* $\mathscr{S}_{34}=0$. Here we choose $e = p_2/(p_2\cdot p_1)$, and a new frame

$$R_2\left(n_1(R) = \frac{P}{\sqrt{s}},\ n_2(R) = W,\ n_3(R) = q_{12}\right).$$

In this frame, we get an expansion which is identical to the C-T.M.N.'s expansion (eq. (2.9) of ref. [1]), apart from some factors regular and finite at $\mathscr{S}_{34}=0$:

a) $\lambda_1 \leq 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \left[\frac{m_2}{s-m_2^2}\right]^{2|\lambda_1|} \sum \dots .$$

b) $\lambda_1 \geq 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sum_{\lambda_1'\lambda_2'} (-1)^{s_2-\lambda_2+s_3+\lambda_3} D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\omega_2 + k\sigma_z}{s-m_2^2}\right)^{\Delta_1}_{\Delta_1} D^{|\lambda_1|}(L_{\lambda}^{\dagger -1})^{\lambda_1}{}_{\lambda_1} \dots .$$

Here we just quote the terms which differ from the C-T.M.N. expansion A. Hence

$$\begin{cases} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\varphi_{34}) = \eta_{34}\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\varphi_{34});\ \eta_{34} = (-1)^{s_3-s_4+\lambda}, \\ \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\psi_{34}) = \eta_{34}(-1)^{2s_3}\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\psi_{34}), & \text{if } m_4 > m_3, \\ \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\psi_{34}) = \eta_{34}(-1)^{2s_4}\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\psi_{34}), & \text{if } m_3 > m_4 \end{cases} \tag{2.18}$$

and $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq \mathscr{S}_{34}^{-m_{34}}$, where $m_{34} = s_3 + s_4 - \max(|\lambda|, |\mu|)$.

iii) *Kinematical singularities at* $s = m_2^2$. If one turns around $s = m_2^2$, the following changes occur:

$$\frac{\theta_s}{2} \to \frac{\theta_s}{2} \pm \pi\,, \qquad \sqrt{k} \to -\sqrt{k}\,, \qquad \left(k = \frac{s - m_2^2}{2\sqrt{s}}\right).$$

Then using expansion B, (eq. (2.16)), we get

$$\left\{\begin{array}{l} M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s-m_2^2}) = (-1)^{2|\lambda_1|+2|\lambda_1|+2s_3} M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s-m_2^2}) \\ \text{and} \\ \widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s-m_2^2}) = (-1)^{2s_3}(-1)^{2\max(|\lambda|,|\mu|)} \cdot \\ \qquad \cdot \widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s-m_2^2}) = (-1)^{2|\lambda_1|} \widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s-m_2^2})\,. \end{array}\right. \tag{2.19}$$

It is easy to find the kinematical poles at $s = m_2^2$:

for $\lambda_1 < 0$ $\quad D^{|\lambda_1|}(B_1)^{\lambda_1}{}_{\lambda_1} \simeq \sqrt{k}^{-2|\lambda_1|}$ and for $\lambda_1 > 0$ $\quad D^{|\lambda_1|}(B_1^{+-1})^{\lambda_1}{}_{\lambda_1} \simeq \sqrt{k}^{2|\lambda_1|}$,

$$d^{|\lambda_1|}(-\theta_s)^{\lambda_1}{}_{\lambda_1} \simeq \sqrt{k}^{-2|\lambda_1|} \quad \text{and} \quad d^{s_3}(-\theta_s)^{\lambda_2}{}_{\lambda_2} \simeq \sqrt{k}^{-2s_3}\,.$$

Then we deduce that

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq \sqrt{k}^{-2s_3} \quad \text{and} \quad \widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq \sqrt{k}^{-2s_3+2\max(|\lambda|,|\mu|)}\,. \tag{2.20}$$

From eq. (2.19) and eq. (2.20),

$$\sqrt{k}^{2m_{12}} \widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \text{ is kinematically regular at } s = m_2^2\,, \tag{2.21}$$

where $m_{12} = s_2 - \max(|\lambda|, |\mu|)$ (*).

iv) *Kinematical singularities at* $s = 0$.

a) Behaviour of the boosts B_i near $s = 0$.

Particles 3 *and* 4: We have

$$\left(\frac{\omega_i + m_i - p_{ij}}{\sqrt{2m_i(\omega_i + m_i)}}\right) = \left(\frac{\omega_i - p_{ij}}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{m_i^2 - m_j^2 + s - \mathscr{S}_{34}}{2\sqrt{s}m_i}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(*) The main difference between the massive case and the massless case appears in this result. Here the exponent of $(s - m_2^2)$ is independent of the value of the spin of the massless particle. Furthermore, we do not need to associate $M_{\lambda_f;\lambda_i}$ with $M_{\lambda_f;-\lambda_i}$ as expected in a massless case since the states $||\lambda|\rangle$ and $|-|\lambda|\rangle$ may correspond to different particles ($\bar{\nu}$ and ν respectively).

The behaviour of this quantity near $s=0$ depends on the determination of $\mathscr{S}_{34}$. For small $|s|$, $\mathscr{S}_{34}=-\varepsilon|m_3^2-m_4^2|+O(s)$ where $\varepsilon=\pm 1$ depending on the way chosen to define the cuts of $\mathscr{S}_{34}$ in the s-plane; for instance $\varepsilon=+1$ if $\mathscr{S}_{34}$ is cut as shown in Fig. 2.

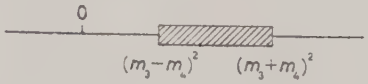


Fig. 2.

Let us now define $\varepsilon_{ij}=(m_i-m_j)/|m_i-m_j|$. Then $(\omega_i-p_{ij})/m_i\simeq\sqrt{s}^{-\varepsilon\varepsilon_{ij}}$.

Particles 1 *and* 2: $D^{|\lambda_1|}(B_1)^{\lambda_1}{}_{\lambda_1}\simeq\sqrt{s}^{-\lambda_1}\,D^{|\lambda_2|}(B_2)^{\lambda_2}{}_{\lambda_2}\simeq\sqrt{s}^{-\lambda_2}$.

b) Behaviour of $\cos\theta_s$

$$\cos\theta_s=\frac{s(t-u)+(m_4^2-m_3^2)\,m_2^2}{(s-m_2^2)\,\mathscr{S}_{34}}\,.$$

Then at $s=0$, $\cos\theta_s\simeq-\varepsilon\varepsilon_{34}+O(s)$,

$$\sin\frac{\theta_s}{2}\simeq\sqrt{s}\,\frac{1-\varepsilon\varepsilon_{34}}{2}\,,\qquad\cos\frac{\theta_s}{2}\simeq\sqrt{s}\,\frac{1+\varepsilon\varepsilon_{34}}{2}\,.$$

c) Behaviour of the semi-bivectors

$$e(\overrightarrow{p_1,p_3})^2=e_1^2+e_2^2+e_3^2=f(t)\,,\qquad\text{a polynomial in } t\,,$$
$$e(\overrightarrow{p_2,p_3})^2=e_1'^2+e_2'^2+e_3'^2=g(u)\,,\qquad\text{a polynomial in } u\,.$$

In the frame R_{II} for instance $e_1^2+e_2^2=\frac{1}{4}k^2m_3^2\sin^2\theta_s$ which is finite, regular and in general nonzero at $s=0$; thus e_3 is also finite and regular at $s=0$. So is e_3' for the same reason. In particular, $k(\omega_3-p\cos\theta)$ is finite at $s=0$.

d) Kinematical behaviour at $s=0$.

Using expansion B (2.16) we get

$\lambda_1<0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\simeq\sqrt{s}^{-\lambda_1-\lambda_2+\varepsilon\varepsilon_{34}(\lambda_2-\lambda_1)+|A_1+\varepsilon\varepsilon_{34}\lambda_1|+|A_2-\varepsilon\varepsilon_{34}\lambda_2|+\varepsilon\varepsilon_{34}(M_1+M_2)}\,;$$

using

$$(M_1+M_2+\lambda_3-\lambda_4)=(A_1+A_2)\,,$$

we write this exponent in the form

$$\lambda_1+\varepsilon\varepsilon_{34}A_1+|\lambda_1+\varepsilon\varepsilon_{34}A_1|-(\lambda_2-\varepsilon\varepsilon_{34}A_2)+|\lambda_2-\varepsilon\varepsilon_{34}A_2|\,,$$

which is a nonnegative, *even* integer which attains the value zero for $A_1 = -\varepsilon\varepsilon_{34}\lambda_1$ and $A_2 = \varepsilon\varepsilon_{34}\lambda_2$.

$\lambda_1 > 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq \sqrt{s}^{-2\varepsilon\varepsilon_{34}A_1-\lambda_1-\lambda_2+\varepsilon\varepsilon_{34}(\lambda_3-\lambda_4)+|A_1+\varepsilon\varepsilon_{34}\lambda_1|+|A_2-\varepsilon\varepsilon_{34}\lambda_2|+\varepsilon\varepsilon_{34}(M_1+M_2)};$$

using

$$M_1 + M_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = A_1 + A_2\,,$$

we write this exponent in the form

$$|\lambda_1 + \varepsilon\varepsilon_{34}A_1| - (\lambda_1 + \varepsilon\varepsilon_{34}A_1) + |\lambda_2 - \varepsilon\varepsilon_{34}A_2| - (\lambda_2 - \varepsilon\varepsilon_{34}A_2)\,,$$

which again is a nonnegative, *even* integer which attains the value zero for $A_1 = -\varepsilon\varepsilon_{34}\lambda_1$ and $A_2 = \varepsilon\varepsilon_{34}\lambda_2$.

Then, the helicity amplitudes do not have any kinematical singularity at $s = 0$, whatever the spin configuration may be.

However $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = (\sin(\theta_s/2))^{-|\lambda-\mu|}(\cos(\theta_s/2))^{-|\lambda+\mu|}M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ is singular at $s = 0$, since it behaves like

$$\sqrt{s}^{-|\lambda+\varepsilon\varepsilon_{34}\mu|}\,.$$

Now since in the case $BF \to B'F'$ (and in this case only) $|\lambda-\mu|$ and $|\lambda+\mu|$ differ by an odd integer, it is impossible in this case to free the helicity amplitudes from their kinematical singularities simultaneously at $\Phi(s,t) = 0$, $\mathscr{S}_{34} = 0$ and $s = 0$.

To summarize, each amplitude regularized at $\Phi(s,t)$ and $\mathscr{S}_{34} = 0$ behaves near $s = 0$ like

$$\sqrt{s}^{-(|\lambda|+|\mu|)}[\alpha(s,t) + \sqrt{s}^{2\min(|\lambda|,|\mu|)}\beta(s,t)]\,, \tag{2.22}$$

where $\alpha(s,t)$ and $\beta(s,t)$ have no kinematical singularities at $s = 0$.

v) *Summary and conclusions.* We write down in Table II two amplitudes $F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ and $F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ which do not have any kinematical branch points, poles or zeros. However, in the case $BF \to B'F'$ we must add some remarks.

Looking at Table II one sees that:

a) There remains a kinematical square-root branch point at $s = 0$.

b) The regularization at $\mathscr{S}_{34} = 0$ depends on the choice of the determination of $\sqrt{s}$. The results given here are obtained with the determination of $\sqrt{s}$ which is positive ($\varepsilon = +1$) near $s = (m_3 \pm m_4)^2$. With the other determination, we would get slightly different results: since the helicity amplitudes

themselves are kinematically regular at $s=0$, it is easy to relate

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s}) \qquad \text{to} \qquad F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s})\,;$$

(2.23) we find

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s}) = (-1)^{|\lambda|+|\mu|+|\lambda+\varepsilon_{34}\mu|} F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s})\,.$$

This is a generalization of the MacDowell reciprocity relation [11]. In fact eq. (2.22) provides more information than this generalized MacDowell relation (2.23), since it gives the actual behaviour of R.H.A. near $s=0$.

TABLE II. – $m_1=0$; $m_3\neq m_4$. The index 0 labels the massless particle.

Notations

$$\lambda=\lambda_1-\lambda_2\,, \qquad \mu=\lambda_3-\lambda_4\,, \qquad \eta_{34}=(-1)^{s_3-s_4+\lambda}$$

$$m_{12}=s_2-\max(|\lambda|,|\mu|)\,, \qquad m_{34}=s_3+s_4-\max(|\lambda|,|\mu|)$$

$$N^{\pm}=\begin{cases} N & \text{if } N \text{ is even} \\ N\pm 1 & \text{if } N \text{ is odd} \end{cases}$$

$$\varphi_{34}=\sqrt{s-(m_3+m_4)^2}\,, \qquad \psi_{34}=\sqrt{s-(m_3-m_4)^2}$$

$$\widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}=\sin\left(\frac{\theta_s}{2}\right)^{-|\lambda-\mu|}\cos\left(\frac{\theta_s}{2}\right)^{-|\lambda+\mu|} M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$$

Amplitudes free of kinematical singularities in the case of one initial massless particle:

$$m_1=0\,, \qquad m_3\neq m_4$$

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}=\sqrt{s}^{\,|\lambda|+|\mu|}\,(s-m_2^2)^{m_{12}}\psi_{34}^{c}\varphi_{34}^{d}[\widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}+\eta_{34}\,\widehat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}]$$

$$F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}=\sqrt{s}^{\,|\lambda|+|\mu|}\,(s-m_2^2)^{m_{12}}\psi_{34}^{\gamma}\varphi_{34}^{\delta}[\widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}-\eta_{34}\,\widehat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}]$$

Reactions	Exponents			
	c	d	γ	δ
$B_0B\to BB$ or $F_0B\to F'B'$ or $B_0F\to B'F'$ or $F_0F\to BB$; $m_{F'}>m_{B'}$	m_{34}^{-}	m_{34}^{-}	$m_{34}^{+}-1$	$m_{34}^{+}-1$
$B_0B\to FF$ or $F_0B\to F'B'$ or $B_0F\to B'F'$ or $F_0F\to FF$; $m_{F'}<m_{B'}$	$m_{34}^{+}-1$	m_{34}^{-}	m_{34}^{-}	$m_{34}^{+}-1$

[11] S. W. MACDOWELL: *Phys. Rev.*, 116, 774 (1959).

The particular case $m_3 = m_4$ is treated in Appendix I. The results are summarized in Table IX.

B) Case $m_3 = 0$; $m_1 \neq m_2$. This case is quite similar to the previous one. We will only summarize the results obtained (*).

a) Kinematical singularities at $\Phi(s, t) = 0$.

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \left(\sin\left(\frac{\theta_s}{2}\right)\right)^{|\lambda-\mu|}\left(\cos\left(\frac{\theta_s}{2}\right)\right)^{|\lambda+\mu|} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2},$$

where $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ is kinematically regular at $\Phi(s, t) = 0$.

b) Kinematical singularities at $\mathscr{S}_{12} = 0$.

We choose the frame R_{II} and the gauge which corresponds to $e = p_4/(p_4 \cdot p_3)$. The results reads

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\varphi_{12}) = \eta_{12}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}(+\varphi_{12}); \quad \eta_{12} = (-1)^{s_1-s_2-\mu}, \\ m_1 > m_2 \\ \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\psi_{12}) = \eta_{12}(-1)^{2s_2}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}(\psi_{12}), \\ m_2 > m_1 \\ \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\psi_{12}) = \eta_{12}(-1)^{2s_1}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}(\psi_{12}), \\ \text{and} \\ \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq \mathscr{S}_{12}^{m_{12}} \quad \text{where} \quad m_{12} = s_1 + s_2 - \max(|\lambda|, |\mu|). \end{array}\right. \tag{2.24}$$

c) Kinematical singularities at $s = m_4^2$.

We choose the frame R_I, and the gauge which corresponds to $e = p_1/(p_1 \cdot p_3)$. The results read

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s-m_4^2}) = (-1)^{2|\lambda_3|}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s-m_4^2}). \tag{2.25a}$$

The function

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\sqrt{p}^{-2m_{34}} \tag{2.25b}$$

is kinematically regular at $s = m_4^2$ $(m_{34} = s_4 - \max(|\lambda|, |\mu|))$.

d) Kinematical singularities at $s = 0$.

(*) In this case $p_3^2 = 0$, but a Joos expansion exists as a function of the two semi-bivectors $e(p_2, p_4)$ and $e(p_2, p_3)$ $(p_2^2 \neq 0)$.

As before, the helicity amplitudes $M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ are «regular» at $s=0$ but $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ behaves like $\sqrt{s}^{-|\lambda+\varepsilon\varepsilon_{12}\mu|}$ near $s=0$.

Then the amplitudes, regularized at $\Phi(s,t)=0$ and $\mathscr{S}_{12}=0$, behave near $s=0$ like

$$\sqrt{s}^{-(|\lambda|+|\mu|)}\left[\alpha(s,t)+\sqrt{s}^{-2\min(|\lambda|,|\mu|)}\beta(s,t)\right], \tag{2.26}$$

where $\alpha(s,t)$ and $\beta(s,t)$ have no kinematical singularities at $s=0$.

All the results are summarized in Table III. The particular case $m_1=m_2$ is treated in Appendix I. The results are summarized in Table X.

TABLE III. – $m_3=0$, $m_1\neq m_2$.

Notations

$$\lambda=\lambda_1-\lambda_2\,,\qquad \mu=\lambda_3-\lambda_4\,,\qquad \eta_{12}=(-1)^{s_1-s_2-\mu}$$

$$m_{12}=s_1+s_2-\max(|\lambda|,|\mu|)\,,\qquad m_{34}=s_4-\max(|\lambda|,|\mu|)$$

$$\varphi_{12}=\sqrt{s-(m_1+m_2)^2}\,,\qquad \psi_{12}=\sqrt{s-(m_1-m_2)^2}$$

Amplitudes free of kinematical singularities in the case of one final massless particle:

$$m_3=0\,,\qquad m_1\neq m_2$$

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}=\sqrt{s}^{-|\lambda|+|\mu|}\,(s-m_4^2)^{m_{34}}\psi_{12}^a\varphi_{12}^b\left[\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}+\eta_{12}\,\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}\right]$$

$$F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}=\sqrt{s}^{-|\lambda|+|\mu|}\,(s-m_4^2)^{m_{34}}\psi_{12}^\alpha\varphi_{12}^\beta\left[\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}-\eta_{12}\,\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}\right]$$

Reactions	Exponents			
	a	b	α	β
$BB\to B_0B$ or $BF\to B_0F'$ or $BF\to F_0B'$ or $BB\to F_0F$ } $m_F>m_B$	m_{12}^-	m_{12}^-	m_{12}^+-1	m_{12}^+-1
$F\bar{F}\to B_0B$ or $BF\to B_0F'$ or $BF\to F_0B'$ or $FF\to F_0F$ } $m_F<m_B$	m_{12}^+-1	m_{12}^-	m_{12}^-	m_{12}^+-1

2·3.2. General mass case with two massless particles.

A) $m_1=m_3=0$; $m_2\neq m_4$. Helicity amplitudes can be expressed in terms of spinor amplitudes by the following formulae:

$\lambda_1 > 0,\ \lambda_3 > 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma p_i}{2(p_i\cdot p_1)} L_{12}^{\dagger-1}(1)\right)^{\Lambda_1}_{\lambda_1} D^{s_2}(L_{12}(2))^{\Lambda_2}{}_{\lambda_2}\cdot$$
$$\cdot D^{|\lambda_3|}\left(\frac{m_k}{2(p_k\cdot p_3)} L_{12}(3)\varepsilon^{-1}\right)^{\Lambda_3}_{\lambda_3} D^{s_4}(L_{12}(4)\varepsilon)^{\Lambda_4}{}_{\lambda_4}\mathscr{M}^{\dagger;+}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(p_i)\,,$$

$\lambda_1 > 0,\ \lambda_3 < 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma p_i}{2(p_i\cdot p_1)} L_{12}^{\dagger-1}(1)\right)^{\Lambda_1}_{\lambda_1} D^{s_2}(L_{12}(2))^{\Lambda_2}{}_{\lambda_2}\cdot$$
$$\cdot D^{|\lambda_3|}\left(\frac{\sigma p_k}{2(p_k\cdot p_3)} L_{12}^{\dagger-1}(3)\varepsilon\right)^{\Lambda_3}_{\lambda_3} D^{s_4}(L_{12}(4)\varepsilon)^{\Lambda_4}{}_{\lambda_4}\mathscr{M}^{-;+}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(p_i)\,,$$

$\lambda_1 < 0,\ \lambda_3 < 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{m_i}{2(p_i\cdot p_1)} L_{12}(1)\right)^{\Lambda_1}_{\lambda_1} D^{s_2}(L_{12}(2))^{\Lambda_2}{}_{\lambda_2}\cdot$$
$$\cdot D^{|\lambda_3|}\left(\frac{\sigma p_k}{2(p_k\cdot p_3)} L_{12}^{\dagger-1}(3)\varepsilon\right)^{\Lambda_3}_{\lambda_3} D^{s_4}(L_{12}(4)\varepsilon)^{\Lambda_4}{}_{\lambda_4}\mathscr{M}^{-;-}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(p_i)\,,$$

$\lambda_1 < 0,\ \lambda_3 > 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{m_i}{2(p_i\cdot p_1)} L_{12}(1)\right)^{\Lambda_1}_{\lambda_1} D^{s_2}(L_{12}(2))^{\Lambda_2}{}_{\lambda_2}\cdot$$
$$\cdot D^{|\lambda_3|}\left(\frac{m_k}{2(p_k\cdot p_3)} L_{12}(3)\varepsilon^{-1}\right)^{\Lambda_3}_{\lambda_3} L^{s_4}(L_{12}(4)\varepsilon)^{\Lambda_4}{}_{\lambda_4}\cdot\mathscr{M}^{+;-}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(p_i)\,,$$

where p_i and p_k correspond to the choice of a definite gauge for particles 1 and 3 respectively ($p_i^2 = m_i^2$, $p_k^2 = m_k^2$).

a) Kinematical singularities at $\Phi(s,t) = 0$.

We choose $p_i = p_k = p_4$. In the frame R_{II}, we notice that apart from some factors regular at $\Phi(s,t) = 0$, our expansions have the same form as the C-T.M.N expansion (eq. (2.10) of ref. (1)) (*).

The C-T.M.N result holds in this case, namely

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \left(\sin\left(\frac{\theta_s}{2}\right)\right)^{|\lambda-\mu|}\left(\cos\left(\frac{\theta_s}{2}\right)\right)^{|\lambda+\mu|}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\,, \tag{2.27}$$

where $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ is kinematically regular at $\Phi(s,t) = 0$.

(*) Since $p_3^2 = 0$, we expand $\mathscr{M}_{\{\Lambda_i\}}$ as functions of the two semi-bivectors $e(p_1, p_4)$ and $e(p_2, p_4)$.

b) Kinematical singularities at $s = m_2^2$.

Again with $p_i = p_k = p_4$ and frame R_{II}, we obtain the result (2.19):

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s-m_2^2}) = (-1)^{2|\lambda_1|}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s-m_2^2}),$$

and the function

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\sqrt{k}^{2m_{12}} \text{ is regular at } s = m_2^2 \ \left(m_{12} = s_2 - \max\left(|\lambda|, |\mu|\right)\right).$$

c) Kinematical singularities at $s = m_4^2$.

Here we choose $p_i = p_k = p_2$ and the frame R_I. The result (2.25*a*) is valid, namely

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s-m_4^2}) = (-1)^{2|\lambda_3|}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s-m_4^2}),$$

and the function $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\sqrt{p}^{2m_{34}}$ is regular at $s = m_4^2 \left(m_{34} = s_4 - \max\left(|\lambda|, |\mu|\right)\right)$.

d) Kinematical singularities at $s = 0$.

i) *Behaviour of the boost* B_i *near* $s = 0$.

$$D^{|\lambda_1|}(B_1)^{\lambda_1}_{\lambda_1} \simeq \sqrt{s}^{-\lambda_1}, \qquad D^{s_2}(B_2)^{\lambda_2}_{\lambda_2} \simeq \sqrt{s}^{-\lambda_2},$$

$$D^{|\lambda_3|}(B_3)^{\lambda_3}_{\lambda_3} \simeq \sqrt{s}^{-\lambda_3}. \qquad D^{s_4}(B_4)^{\lambda_4}_{\lambda_4} \simeq \sqrt{s}^{-\lambda_4}.$$

ii) *Behaviour* of $\cos\theta_s$.

$$\cos\theta_s = \frac{s(t-u) + m_4^2 m_2^2}{(s-m_4^2)(s-m_2^2)}, \text{ then } \cos\theta_s = 1 + O(s).$$

iii) *Behaviour of the semi-bivectors in the frame* II.

$$e_3(p_1, p_4) = k(p + \omega_4 \cos\theta_s)$$

is finite at $s = 0$ $(p + \omega_4 \cos\theta_s \simeq \sqrt{s}$ near $s = 0)$;

$$e_3(p_2, p_4) = \omega_2 p - k\omega_4 \cos\theta_s = \frac{m_2^2 - m_4^2}{2} + O(s)$$

is finite at $s = 0$.

iv) *Behaviour of the helicity amplitudes.* We use an expansion of type B in the frame R_{II} with the choice $p_i = p_4$ and $p_k = p_2$ $(p_1 \cdot p_4 = k(\omega_4 + p\cos\theta_s)$ and $p_2 \cdot p_3 = p(\omega_2 + k\cos\theta_s)$ are finite at $s = 0)$.

$$(\omega_4 - \varepsilon_1 p)^{|M_1|} \simeq \sqrt{s}^{-M_1} \qquad \text{and} \qquad (\omega_4 - \varepsilon_2 p)^{|M_2|} \simeq \sqrt{s}^{-M_2}$$

(ε_1 and ε_2 are the signs of M_1 and M_2).

We treat explicitly the case $\lambda_1 < 0$ and $\lambda_3 > 0$.

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq \sqrt{s}^{-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4+|A_1-\lambda_1|+|A_2+\lambda_2|-(M_1+M_2)} .$$

Using $M_1 + M_2 = A_1 + A_2 - \lambda_3 + \lambda_4$, we write this exponent in the form

$$|A_1 - \lambda_1| - (A_1 - \lambda_1) + |A_2 + \lambda_2| - (A_2 + \lambda_2) ,$$

which is a nonnegative even integer attaining the value zero for

$$A_1 = \lambda_1 \qquad \text{and} \qquad A_2 = -\lambda_2 .$$

The same result is valid for the three other helicity configurations. (We do not reproduce the proof which is quite similar.) Thus the helicity amplitudes do not have kinematical singularity at $s = 0$, whatever the configuration may be.

However

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \left(\sin\left(\frac{\theta_s}{2}\right)\right)^{-|\lambda-\mu|} \left(\cos\left(\frac{\theta_s}{2}\right)\right)^{-|\lambda+\mu|} M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} ,$$

is singular at $s = 0$ since it behaves like

$$\sqrt{s}^{\,-|\lambda-\mu|} .$$

v) *Summary and results.* From this study, we conclude that the function

$$F_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{|\lambda-\mu|} \sqrt{k}^{2m_{12}} \sqrt{p}^{2m_{34}} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \tag{2.28}$$

is kinematically regular at $\Phi(s,t) = 0$ $s = m_2^2$, $s = m_4^2$ and $s = 0$.

The results are summarized in Table IV.

TABLE IV. – $m_1 = m_3 = 0$, $m_2 \neq m_4$.

Notations

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 , \qquad \mu = \lambda_3 - \lambda_4$$

$$m_{12} = s_2 - \max(|\lambda|, |\mu|) , \qquad m_{34} = s_4 - \max(|\lambda|, |\mu|)$$

Amplitudes free of kinematical singularities in the case of one initial and one final massless particle ($m_1 = m_3 = 0$; $m_2 \neq m_4$)

$$F_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{|\lambda-\mu|} (s - m_2^2)^{m_{12}} (s - m_4^2)^{m_{34}} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$$

The particular case $m_2 = m_4$ is treated in Appendix I.
The results are summarized in Table XI.
We note that in this case, there is no exception for a $BF \to B'F'$ reaction.

B) $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 \neq m_4$. Helicity amplitudes can be expressed in terms of spinor amplitudes by the following formulae:

$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma p_i}{2(p_i\cdot p_1)} L_{12}^{\dagger -1}(1)\right)^{\Lambda_1}_{\lambda_1} D^{|\lambda_2|}\left(\frac{\sigma p_i}{2(p_i\cdot p_2)} L_{12}^{\dagger -1}(2)\right)^{\Lambda_2}_{\lambda_2} \cdot$$
$$\cdot D^{s_3}\left(L_{12}(3)\varepsilon\right)^{\Lambda_3}{}_{\lambda_3} D^{s_4}\left(L_{12}(4)\varepsilon\right)^{\Lambda_4}{}_{\lambda_4} \mathscr{M}^{++}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(p_i)\,,$$

$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{\sigma p_i}{2(p_i\cdot p_1)} L_{12}^{\dagger -1}(1)\right)^{\Lambda_1}_{\lambda_1} D^{|\lambda_2|}\left(\frac{m_i}{2(p_i\cdot p_2)} L_{12}(2)\right)^{\Lambda_2}_{\lambda_2} \cdot$$
$$\cdot D^{s_3}\left(L_{12}(3)\varepsilon\right)^{\Lambda_3}{}_{\lambda_3} D^{s_4}\left(L_{12}(4)\varepsilon\right)^{\Lambda_4}{}_{\lambda_4} \mathscr{M}^{+-}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(p_i)\,,$$

$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{m_i}{2(p_i\cdot p_1)} L_{12}(1)\right)^{\Lambda_1}_{\lambda_1} D^{|\lambda_2|}\left(\frac{m_i}{2(p_i\cdot p_2)} L_{12}(2)\right)^{\Lambda_2}_{\lambda_2} \cdot$$
$$\cdot D^{s_3}\left(L_{12}(3)\varepsilon\right)^{\Lambda_3}{}_{\lambda_3} D^{s_4}\left(L_{12}(4)\varepsilon\right)^{\Lambda_4}{}_{\lambda_4} \mathscr{M}^{--}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(p_i)\,,$$

$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = D^{|\lambda_1|}\left(\frac{m_i}{2(p_i\cdot p_1)} L_{12}(1)\right)^{\Lambda_1}_{\lambda_1} D^{|\lambda_2|}\left(\frac{\sigma p_i}{2(p_i\cdot p_2)} L_{12}^{\dagger -1}(2)\right)^{\Lambda_2}_{\lambda_2} \cdot$$
$$\cdot D^{s_3}\left(L_{12}(3)\varepsilon\right)^{\Lambda_3}{}_{\lambda_3} D^{s_4}\left(L_{12}(4)\varepsilon\right)^{\Lambda_4}{}_{\lambda_4} \mathscr{M}^{-+}_{\Lambda_3\Lambda_4;\Lambda_1\Lambda_2}(p_i)\,,$$

where p_i corresponds to the gauge choice.

a) Kinematical singularities at $\Phi(s, t) = 0$.

We choose $p_i = p_3$ and expand the $\mathscr{M}_{\{\Lambda_i\}}$ as functions of the two usual semi-bivectors $e(p_1, p_3)$ and $e(p_2, p_3)$. Using the frame R_{II}, the expansions of type *B* have the same form as the C-T.M.N expansion (eq. (2.20) of ref. [1]). Their result holds, namely

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{|\lambda-\mu|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{|\lambda+\mu|} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\,. \tag{2.29}$$

b) Kinematical singularities at $\mathscr{S}_{24} = 0$.

We choose $p_i = p_3 + p_4$, then $m_i = \sqrt{s}$, $(p_3 + p_4)^2 = s$.

Then $\sigma p_i = (\omega_3 + \omega_4)\ I$ is regular and finite at $\mathscr{S}_{34} = 0$ and

$$p_1 \cdot (p_3 + p_4) = \quad k(\omega_3 + \omega_4) = \quad 2k^2\,,$$

$$p_2 \cdot (p_3 + p_4) = k(\omega_3 + \omega_4) = 2k^2$$

are regular and finite at $\mathscr{S}_{34} = 0$.

In the frame R_I, our expansion A is identical to the C-T.M.N expansion A (eq. (2.9) of ref. (1)) apart from some factors regular and finite at $\mathscr{S}_{34} = 0$.

The C-T.M.N results hold in this case, namely.

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\varphi_{34}) = \eta_{34}\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\varphi_{34})\,, \qquad \eta_{34} = (-1)^{s_3-s_4+\lambda}\,,$$

if $m_4 > m_3$

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\psi_{34}) = \eta_{34}(-1)^{2s_3}\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\psi_{34})\,,$$

if $m_3 > m_4$

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\psi_{34}) = \eta_{34}(-1)^{2s_4}\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\psi_{34})\,,$$

and

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq \mathscr{S}_{34}^{-m_{34}}\,, \qquad \text{where} \qquad m_{34} = s_3 + s_4 - \max\left(|\lambda|,\ |\mu|\right).$$

c) Kinematical singularities at $s = 0$.

Now we choose $p_i = p_3$ ($p_1 \cdot p_3 = -(t - m_3^2)/2$ and $p_2 \cdot p_3 = -(u - m_3^2)/2$ are regular finite at $s = 0$).

i) *Behaviour of the boosts* B_i *near* $s = 0$. For particles 3 and 4

$$\frac{\omega_i - p_{ij}}{m_i} \simeq \sqrt{s}^{-\varepsilon\varepsilon_{ij}} \text{ if } \mathscr{S}_{34} = -\varepsilon\varepsilon_{34}(m_3^2 - m_4^2) + O(s)\,,$$

for particle 1, $D^{|\lambda_1|}(B_1)^{\lambda_1}{}_{\lambda_1} \simeq \sqrt{s}^{-\lambda_1}$; for particle 2, $D^{|\lambda_2|}(B_2)^{\lambda_2}{}_{\lambda_2} \simeq \sqrt{s}^{-\lambda_2}$.

ii) *Behaviour of* $\cos\theta_s$. At $s = 0$,

$$\cos\theta_s = -\frac{\varepsilon\varepsilon_{34}(t-u)}{m_3^2 - m_4^2}\,.$$

iii) *Behaviour of the semi-bivectors.* $e_3(p_1, p_3) = \frac{1}{2}k(p - \omega_3\cos\theta)$ and $e_3'(p_2, p_3) = \frac{1}{2}k(p + \omega_3\cos\theta)$ are regular and finite at $s = 0$.

iv) *Behaviour of the helicity amplitudes.*

$\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 < 0$. Using expansion B in the R_{II} frame, one finds that $M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ behaves near $s = 0$ as

$$\sqrt{s}^{-\lambda_1-\lambda_2+\varepsilon\varepsilon_{34}(\lambda_3-\lambda_4)+|M_1|+|M_2|+\varepsilon\varepsilon_{34}(M_1+M_2)} .$$

Using $M_1 + M_2 = A_1 + A_2 - \lambda_3 + \lambda_4$, we write this exponent in the form

$$|\lambda_1 - \varepsilon\varepsilon_{34} A_1| + |\lambda_2 - \varepsilon\varepsilon_{34} A_2| + |M_1| + |M_2| \; ;$$

($-\lambda_1 + \varepsilon\varepsilon_{34} A_1$ (respectively $-\lambda_2 + \varepsilon\varepsilon_{34} A_2$) is positive since λ_1 (respectively λ_2) is negative).

$\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 > 0$. One finds that $M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ behaves near $s = 0$ as

$$\sqrt{s}^{-\lambda_1+\lambda_2-2\varepsilon\varepsilon_{34}A_2+\varepsilon\varepsilon_{34}(\lambda_3-\lambda_4)+|M_1|+|M_2|+\varepsilon\varepsilon_{34}(M_1+M_2)} .$$

Using $M_1 + M_2 = A_1 + A_2 - \lambda_3 + \lambda_4$, we write again this exponent in the form

$$|\lambda_1 - \varepsilon\varepsilon_{34} A_1| + |\lambda_2 - \varepsilon\varepsilon_{34} A_2| + |M_1| + |M_2| .$$

The same results hold for $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ and $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. We set

$$\mathscr{A} = |\lambda_1 - \varepsilon\varepsilon_{34} A_1| + |\lambda_2 - \varepsilon\varepsilon_{34} A_2| + |M_1| + |A_1 + A_2 - \lambda_3 + \lambda_4 - M_1| .$$

$\mathscr{A}$ is obviously a positive integer.

Any dummy index A_1, A_2, M_1 appears twice in the four forms of $\mathscr{A}$, so that, if one varies the value of one index by one unit, $\mathscr{A}$ is changed into $\mathscr{A} + 2$, $\mathscr{A}$ or $\mathscr{A} - 2$. Now, for $A_1 = \varepsilon\varepsilon_{34}\lambda_1$, $A_2 = \varepsilon\varepsilon_{34}\lambda_2$, $M_1 = 0$, $\mathscr{A}$ reduces to $|\lambda_1 + \lambda_2 - \varepsilon\varepsilon_{34}\mu|$ and cannot decrease. Thus, $\mathscr{A}\min = |\lambda_1 + \lambda_2 - \varepsilon\varepsilon_{34}\mu|$ and other values of $\mathscr{A}$ differ from these by positive even integers. Hence,

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq \sqrt{s}^{|\lambda_1+\lambda_2-\varepsilon\varepsilon_{34}\mu|} f_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} ,$$

where $f_{\{\lambda_i\}}$ is regular at $s = 0$.

The same result holds for $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ since $\cos\theta_s$ is regular and finite at $s = 0$:

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq \sqrt{s}^{|\lambda_1+\lambda_2-\varepsilon\varepsilon_{34}\mu|}$$

near $s = 0$.

Now, since in the case $BF \to B'F'$ (and in this case only) $|\lambda_1+\lambda_2-\mu|$ and $|\lambda_1+\lambda_2+\mu|$ differ by an odd integer, it is impossible in this case to free the helicity amplitudes from their kinematical singularities simultaneously at $\Phi(s,t)=0$, $\mathscr{S}_{34}=0$ and $s=0$.

To summarize, the amplitudes, regularized at $\mathscr{S}_{34}=0$ and $\Phi(s,t)=0$, behave near $s=0$ like

$$\sqrt{s}^{-|\,|\lambda_1+\lambda_2|-|\mu|\,|}\left(\alpha(s,t)+\sqrt{s}^{-2\min(|\mu|,|\lambda_1+\lambda_2|)}\beta(s,t)\right), \tag{2.30}$$

where $\alpha(s,t)$ and $\beta(s,t)$ have no kinematical singularities at $s=0$.

C) $m_3=m_4=0$; $m_1\neq m_2$. The same kind of results holds, namely:

a) Kinematical singularities at $\Phi(s,t)=0$. We get

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}=\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{|\lambda-\mu|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{|\lambda+\mu|}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2},$$

where $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ is kinematically regular at $\Phi(s,t)=0$.

b) Kinematical singularities at $\mathscr{S}_{12}=0$.

$$\left\{\begin{array}{l}
\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\varphi_{12})=\eta_{12}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}(\varphi_{12}),\quad \eta_{12}=(-1)^{s_1-s_2-\mu},\\
\text{if } m_2>m_1\\
\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\psi_{12})=\eta_{12}(-1)^{2s_1}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}(\psi_{12}),\\
\text{if } m_1>m_2\\
\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\psi_{12})=\eta_{12}(-1)^{2s_2}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}(\psi_{12}),\\
\text{and}\\
\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\simeq\mathscr{S}_{12}^{-m_{12}}\quad\text{where}\quad m_{12}=s_1+s_2-\max\left(|\lambda|,|\mu|\right).
\end{array}\right. \tag{2.29'}$$

c) Kinematical singularities at $s=0$.

Near $s=0$

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\simeq\sqrt{s}^{-|\lambda_3+\lambda_4-\varepsilon\varepsilon_{12}\lambda|}$$

if $\mathscr{S}_{12}=-\varepsilon\varepsilon_{12}(m_1^2-m_2^2)(s)$.

Then the amplitudes regularized at $\mathscr{S}_{12}=0$ and $\Phi(s,t)=0$ behave near $s=0$ like

$$\sqrt{s}^{-|\,|\lambda_3+\lambda_4|-|\lambda|\,|}\left(\alpha(s,t)+\sqrt{s}^{-2\min(|\lambda|,|\lambda_3+\lambda_4|)}\beta(s,t)\right), \tag{2.31}$$

where $\alpha(s,t)$ and $\beta(s,t)$ have no kinematical singularities at $s=0$.

d) Summary and results.

In the case *B*) (respectively *C*), we write down in Table V (respectively VI) two amplitudes $F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ and $F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ which do not have any kinematical branch points, poles or zeros. However, in the case $BF \to B'F'$ we must add some remarks:

1) There remains a kinematical square-root branch point at $s = 0$.

2) The regularization at $\mathscr{S}_{34} = 0$ (respectively $\mathscr{S}_{12} = 0$) depends on the choice of the determination of $\sqrt{s}$. The results given here are obtained with the determination of $\sqrt{s}$ which is positive near $(m_3 \pm m_4)^2$ (respectively $(m_1 \pm m_2)^2$). With the other determination, we would get slightly different results. It is easy to relate $F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s})$ to $F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s})$.

TABLE V. – $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 \neq m_4$.

Amplitudes free of kinematical singularities in the case of two initial massless particles

$$m_1 = m_2 = 0\,, \qquad m_3 \neq m_4$$

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{-|\lambda_1+\lambda_2|-|\mu|}\, \varphi^c_{34}\varphi^d_{24}\,[\widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{34}\,\widehat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}]$$

$$F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{-|\lambda_1+\lambda_2|-|\mu|}\, \varphi^\gamma_{34}\varphi^\delta_{34}\,[\widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{34}\,\widehat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}]$$

The exponents c, d, γ, δ and the phase η_{34} are defined in Table II.

TABLE VI. – $m_1 \neq m_2$, $m_3 = m_4 = 0$.

Amplitudes free of kinematical singularities in the case of two final massless particles

$$m_1 \neq m_2\,, \qquad m_3 = m_4 = 0$$

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{-|\lambda_3+\lambda_4|-|\lambda|}\, \varphi^a_{12}\varphi^b_{12}\,[\widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{12}\,\widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}]$$

$$F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{-|\lambda_3+\lambda_4|-|\lambda|}\, \varphi^\alpha_{12}\varphi^\beta_{12}\,[\widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{12}\,\widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}]$$

The exponents a, b, α, β and the phase η_{12} are defined in Table III.

In both cases, we find

$$(2.32) \qquad F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s}) = \varphi F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s})\,, \quad \text{where} \quad \varphi = (-1)^{|\lambda_1+\lambda_2|-|\mu|+\lambda_1+\lambda_2-\varepsilon_{34}\mu|}$$

(respectively $\varphi = (-1)^{|\lambda_3+\lambda_4|-|\lambda|+|\lambda_3+\lambda_4-\varepsilon_{12}\lambda|}$).

As before, these relations can be interpreted as a generalization of the MacDowell reciprocity relation [11]. But in fact eqs. (2.30), (2.31) provide

more information than this generalized MacDowell relation (2.32) since it gives the actual behaviour of the R.H.A. near $s=0$. The particular cases $m_1=m_2=0$, $m_3=m_4\neq 0$ and $m_3=m_4=0$, $m_1=m_2$ are treated in Appendix I. Results are given in Tables XII and XIII.

2·3.3. Case with three massless particles.

A) $m_1=m_2=m_4=0$. Helicity amplitudes can be expressed in terms of spinor amplitudes by the following formulae:

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}=D^{|\lambda_1|}\big(\mathscr{L}(1)\big)^{\Delta_1}{}_{\lambda_1}D^{|\lambda_2|}\big(\mathscr{L}(2)\big)^{\Delta_2}{}_{\lambda_2}D^{|\lambda_4|}\big(\mathscr{L}(4)\big)^{\Delta_4}{}_{\lambda_4}D^{s_3}\big(L_{12}(3)\varepsilon\big)^{\Delta_3}{}_{\lambda_3}\mathscr{M}_{\Delta_i}(p_i)\,,$$

where

$$\mathscr{L}(1)=\frac{\sigma p_1}{2(p_i\cdot p_1)}L_{12}^{\dagger-1}(1) \qquad \text{for } \lambda_1>0,$$

$$\mathscr{L}(1)=\frac{m_i}{2(p_i\cdot p_1)}L_{12}(1) \qquad \text{for } \lambda_1<0,$$

$$\mathscr{L}(2)=\frac{\sigma p_i}{2(p_i\cdot p_2)}L_{12}^{\dagger-1}(2) \qquad \text{for } \lambda_2>0,$$

$$\mathscr{L}(2)=\frac{m_i}{2(p_i\cdot p_2)}L_{12}(2) \qquad \text{for } \lambda_2<0,$$

$$\mathscr{L}(4)=\frac{m_i}{2p_i\cdot p_4}L_{12}(4)\varepsilon^{-1} \qquad \text{for } \lambda_4>0,$$

$$\mathscr{L}(4)=\frac{\sigma p_i}{2p_i\cdot p_4}L_{12}^{\dagger-1}(4)\varepsilon \qquad \text{for } \lambda_4<0.$$

a) Kinematical singularities at $\Phi(s,t)=0$.

Choosing $p_i=p_3$, we find that the usual result holds, namely

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}=\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{|\lambda-\mu|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{|\lambda+\mu|}.$$

b) Kinematical singularities at $s=m_3^2$.

Choose $p_i=p_3+p_4$; $m_i=\sqrt{s}$. In the frame R_{I}, σp_i does not introduce singularities at $s=m_3^2$. Then result (2.25*a*) holds, namely

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\big(-\sqrt{s-m_3^2}\big)=(-1)^{2|\lambda_4|}\,\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\big(\sqrt{s-m_3^2}\big)$$

and $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\sqrt{p}^{-2m_{34}}$ is kinematically regular at $s=m_3^2$ $\big(m_{34}=s_3-\max\big(|\lambda|,|\mu|\big)\big)$.

c) Kinematical singularities at $s=0$.

Now we choose $p_i=p_3$ ($p_1\cdot p_3=-(t-m_3^2)/2$ and $p_2\cdot p_3=-(u-m_3^2)/2$ are regular and finite at $s=0$).

i) *Behaviour of the boosts B_i near $s=0$.*

$$D^{|\lambda_1|}(B_1)^{\lambda_1}{}_{\lambda_1}\simeq\sqrt{s}^{-\lambda_1}D^{|\lambda_2|}(B_2)^{\lambda_2}{}_{\lambda_2}\simeq\sqrt{s}^{-\lambda_2},\quad D^{s_4}(B_3)^{\lambda_3}{}_{\lambda_3}\simeq\sqrt{s}^{-\lambda_3}D^{|\lambda_4|}(B_4)^{\lambda_4}{}_{\lambda_4}\simeq\sqrt{s}^{-\lambda_4}.$$

ii) *Behaviour of $\cos\theta_s$ near $s=0$.*

$$\cos\theta_s=\frac{(t-u)}{(s-m_3^2)}$$

is regular and finite at $s=0$.

iii) *Behaviour of the semi-bivectors near $s=0$.*

$$e_3(p_1,p_3)=k(p-\omega_3\cos\theta_s)$$

is finite and regular at $s=0$,

$$e_3(p_2,p_3)=k(p+\omega_3\cos\theta_s)$$

is also finite and regular at $s=0$.

iv) *Behaviour of the helicity amplitudes near $s=0$.* $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ ($\lambda_3>0$ or $\lambda_4<0$). Using expansion B in the R_{II} frame one finds that $M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ behaves near $s=0$ as

$$\sqrt{s}^{-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4+|M_1|+|M_2|-M_1-M_2}.$$

Using $M_1+M_2+\lambda_3-\lambda_4=A_1+A_2$, we write the exponent in the form $\mathscr{A}=|\lambda_1-A_1|+|\lambda_2-A_2|+|M_1|+|M_2|$.

This exponent is a positive integer. Its minimum value $\mathscr{A}_{\min}$, is obtained for $A_1=\lambda_1$, $A_2=\lambda_2$,

$$\mathscr{A}_{\min}=|\lambda_1+\lambda_2-\mu|$$

and other values of $\mathscr{A}$ differ from this minimum by positive even integers.

The same result holds in the other helicity configurations. Then $M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ and $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ behave near $s=0$ as

(2.33*a*) $$\sqrt{s}^{|\lambda_1+\lambda_2-\mu|}.$$

B) $m_1 = m_3 = m_4 = 0$. The same kind of arguments is valid, namely:

a) $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{|\lambda-\mu|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{|\lambda+\mu|}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$.

b) $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\sqrt{k}^{-2m_{12}}$ is kinematically regular at $s = m_2^2$. $(m_{12} = s_2 - -\max(|\lambda|, |\mu|).)$

c) $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ behaves near $s = 0$ as

(2.33*b*) $$\sqrt{s}^{-|\lambda_3+\lambda_4+\lambda|}.$$

C) Summary and results. We write down in Table VII the amplitudes which do not have any kinematical branch points, poles or zeros, namely

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\frac{\sqrt{p}^{-2m_{34}}}{\sqrt{s}^{|\lambda_1+\lambda_2-\mu|}} \qquad \text{for } m_3 \neq 0$$

and

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\frac{\sqrt{k}^{-2m_{12}}}{\sqrt{s}^{|\lambda_3+\lambda_4+\lambda|}} \qquad \text{for } m_2 \neq 0.$$

TABLE VII. – *Three massless particles.*

Amplitudes free of kinematical singularities in the case of three massless particles

a) $m_1 = m_2 = m_4 = 0$

$$F_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{-|\lambda_1+\lambda_2-\mu|}(s - m_3^2)^{(s_3-\max(|\lambda|,|\mu|))}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$$

b) $m_1 = m_3 = m_4 = 0$

$$F_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{-|\lambda_3+\lambda_4+\lambda|}(s - m_2^2)^{(s_2-\max(|\lambda|,|\mu|))}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$$

2·3.4. The special case of 4 massless particles. In this case a Joos expansion can be found. But the Joos invariant functions $a_{l_1l_2}(s, t)$ have kinematical singularities. For instance, if we expand spinor amplitudes in terms of the two independent semi-bivectors (p_1, P) and (p_3, P), the corresponding functions $a_{l_1l_2}(s, t)$ have kinematical singularities at $p^2 = s = 0$ [10]. But, if we want to study the singularities of the helicity amplitudes at $|\cos\theta_s| = 1$, *i.e.* $t = 0$ or $u = 0$, this expansion is still valid.

In the frame R_I

$$e(p_1, P) = -k\sqrt{s} \Rightarrow Y^{M_1}{}_{l_1}(e(p_1, P)) \simeq \delta_0^{M_1}(k\sqrt{s})^{l_1},$$

$$e(p_3, P) = -p\sqrt{s} \Rightarrow Y^{M_3}{}_{l_3}(e(p_3, P)) = (p \sin\theta)^{|M_3|} P(\cos\theta)\sqrt{s}^{-l_3},$$

where $P(\cos\theta)$ is a polynomial in $\cos\theta$. The choice of the gauge corresponds to $e_i = P/(p_i \cdot P)$ for particle i. Using expansion in the frame R_I, we note that

$$M_{\{\lambda_i\}} = \sum_{M_3=\lambda_1-\lambda_2+A_3+A_4} \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{|\lambda_3+A_3|+|\lambda_4-A_4|+|M_3|} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{|\lambda_3-A_3|+|A_4+\lambda_4|+|M_3|} \ldots,$$

where the dots stand for functions regular at $|\cos\theta_s| = 1$. As usual, the minimum of the exponent of $\sin\theta/2$ (respectively $\cos\theta/2$) is obtained for $A_3 = -\lambda_3$, $A_4 = \lambda_4$ (respectively $A_3 = \lambda_3$, $A_4 = -\lambda_4$) and is equal to $|\lambda - \mu|$ (respectively $|\lambda + \mu|$).

Then we can write

$$M_{\{\lambda_i\}} = \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{|\lambda-\mu|} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{|\lambda+\mu|} \hat{M}_{\{\lambda_i\}}, \tag{2.34}$$

where $\hat{M}_{\{\lambda_i\}}$ is regular at $t = 0$ and $u = 0$.

In order to find the kinematical singularity at $s = 0$, we can use a crossing relation which is very simple in this case (*):

$$M^s_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \varphi M^t_{\lambda_3-\lambda_1;-\lambda_4\lambda_2}. \tag{2.35}$$

Using formulae (2.34) and (2.35), we obtain

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\sqrt{-t}}{\sqrt{s}}\right)^{|\lambda-\mu|} \left(\frac{\sqrt{-u}}{\sqrt{s}}\right)^{|\lambda+\mu|} \hat{M}^s_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \\ \qquad = \varphi \left(\frac{\sqrt{-s}}{\sqrt{t}}\right)^{|\sum\lambda_i|} \left(\frac{\sqrt{-u}}{\sqrt{t}}\right)^{|\lambda+\mu|} \hat{M}^t_{\lambda_3-\lambda_1;-\lambda_4\lambda_2}, \\ \text{or} \\ \dfrac{\hat{M}^s_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}}{\sqrt{s}^{-|\lambda-\mu|+|\lambda+\mu|+|\sum\lambda_i|}} = \varphi' \dfrac{\hat{M}^t_{\lambda_3-\lambda_1;-\lambda_4\lambda_2}}{\sqrt{t}^{-|\lambda-\mu|+|\lambda+\mu|+|\sum\lambda_i|}}. \end{array}\right. \tag{2.36}$$

From the regularization of helicity amplitudes at $|\cos\theta| = 1$, the r.h.s. of

(*) This crossing relation will be proved in the next Section under well specified assumptions. φ is a phase which depends on the helicities. See formula (3.11).

eqs. (2.36) have no kinematical singularity at $s=0$. We deduce easily that

$$\frac{\hat{M}^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}}{\sqrt{s}^{-|\lambda-\mu|+|\lambda+\mu|+|\sum_i\lambda_i|}} \tag{2.37}$$

is regular at $s=0$, $t=0$ and $u=0$.

2·3.5. Summary and results. We summarize the results obtained on the kinematical singularities of the helicity amplitudes where one, two, three or four massless particles are involved. In each case we have defined amplitudes $\mathcal{F}_{\{\lambda_i\}}$ which are free of kinematical singularities except for some BF→BF cases, where a square-root branch point remains at $s=0$.

All these results are valid even if parity conservation does not hold (neutrino case). In the neutrino (respectively antineutrino) case the amplitudes corresponding to a positive helicity (respectively negative helicity) do not exist.

If parity conservation holds (photon case, for instance); it is easy to check that all our results are compatible with the parity relations

$$F_{\{\lambda_i\}} = \eta(-1)^{\sum_i(s_i+\lambda_i)} F_{\{-\lambda_i\}} . \tag{2.38}$$

The results of this Section can be formally written as (except in the four massless particles case)

$$F_{\{\lambda\}} = \sum_{i_1 i_2} C^{i_1 i_2}_{\{\lambda\}} a_{i_1 i_2} ,$$

where the $C^{i_1 i_2}_{\{\lambda\}}$ coefficients are polynomials in s (respectively $\sqrt{s}$ in some BF (*) cases) t and u.

In these peculiar BF→BF cases, it is possible to relate $F^1_{\{\lambda_i\}}(-\sqrt{s})$ to $F^2_{\{\lambda_i\}}(\sqrt{s})$. These relations can be interpreted as a generalization of the Mac-Dowell reciprocity relation [11] (see formulae (2.23) and (2.32).

TABLE VIII. – *Four massless particles.*

Amplitudes free of kinematical singularities in the case of four massless particles

$$F_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{-(|\lambda+\mu|+|\lambda-\mu|+|\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4|)} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$$

(*) The cases BF→BF where the square-root singularity at $s=0$ cannot be removed are the following:

a) One massless particle.

b) Two massless particles, both initial or final ($m_1=m_2=0$ or $m_3=m_4=0$).

TABLE IX. – $m_1 = 0$, $m_3 = m_4 = m'$.

Notations

$$s_3 = s_4 = s_f\,, \qquad m_{12} = s_2 - \max(|\lambda|, |\mu|)\,, \qquad p = \tfrac{1}{2}\sqrt{s - 4m'^2}$$

Amplitudes free of kinematical singularities in the case $m_1 = 0$, $m_3 = m_4 = m'$

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,c}\,(s - m_2^2)^{m_{12}} p^d\,[\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{34}\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}]$$

$$F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,\gamma}\,(s - m_2^2)^{m_{12}} p^\delta\,[\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{34}\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}]$$

The exponents d and δ are defined in Table II.

Configuration	Exponent	
	c	γ
$\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda$ even	$(2s_f)^-$	$(2s_f)^+ - 1$
$\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda$ odd	$(2s_f)^+ - 1$	$(2s_f)^-$

TABLE X. – $m_3 = 0$, $m_1 = m_2 = m$.

Notations

$$s_1 = s_2 = s_{\text{in}}\,, \qquad m_{34} = s_4 - \max(|\lambda|, |\mu|)\,, \qquad k = \tfrac{1}{2}\sqrt{s - 4m^2}$$

Amplitudes free of kinematical singularities in the case $m_3 = 0$, $m_1 = m_2 = m$

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,a}\,(s - m_4^2)^{m_{34}} k^b\,[\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{12}\,\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}]$$

$$F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,\alpha}\,(s - m_4^2)^{m_{34}} k^\beta\,[\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{12}\,\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}]$$

The exponents b and β are defined in Table III.

Configuration	Exponent	
	a	α
$\lambda_1 + \lambda_2 + \mu$ even	$(2s_{\text{in}})^-$	$(2s_{\text{in}})^+ - 1$
$\lambda_1 + \lambda_2 + \mu$ odd	$(2s_{\text{in}})^+ - 1$	$(2s_{\text{in}})^-$

TABLE XI. – $m_1 = m_3 = 0$, $m_2 = m_4$.

Notations

$$s_2 = s_4 = S\,, \qquad m_2 = m_4 = m\,, \qquad M = S - \max(|\lambda|, |\mu|)$$

Amplitudes free of kinematical singularities for $m_1 = m_3 = 0$, $m_2 = m_4$

$$F_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,-|\lambda-\mu|}\,(s - m^2)^{2M}\,\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda}$$

TABLE XII. – $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 = m_4 = m'$.

Notations

$$s_3 = s_4 = s_f\,, \qquad p = \tfrac{1}{2}\sqrt{s - 4m'^2}\,, \qquad m_{34} = 2s_f - \max(|\lambda|, |\mu|)$$

Amplitudes free of kinematical singularities in the case $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 = m_4 = m'$

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,\varepsilon}\, p^d [\widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{34}\, \widehat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}]$$

$$F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,\varepsilon}\, p^\delta [\widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{34}\, \widehat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}]$$

d and δ are defined in Table II ($d = m^-_{34}$, $\delta = m^+_{34} - 1$).

$$f = -[\max\{(|\lambda_1 + \lambda_2| - 2s'_f), 0\} + \max\{|\lambda|, |\mu|\}]$$

Configuration	Exponent	
	e	ε
$\sum_i \lambda_i$ even	f^-	$f^+ - 1$
$\sum_i \lambda_i$ odd	$f^+ - 1$	f^-

TABLE XIII. – $m_3 = m_4 = 0$, $m_1 = m_2 = m$.

Notations

$$s_1 = s_2 = s_{in}\,, \qquad k = \tfrac{1}{2}\sqrt{s - 4m^2}\,, \qquad m_{12} = 2s_{in} - \max(|\lambda|, |\mu|)$$

Amplitudes free of kinematical singularities in the case $m_3 = m_4 = 0$, $m_1 = m_2 = m$

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,\varepsilon'}\, k^b [\widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{12}\, \widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}]$$

$$F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,\varepsilon'}\, k^\beta [\widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{12}\, \widehat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}]$$

b and β are defined in the Table III ($b = m^-_{12}$, $\beta = m^+_{12} - 1$).

$$f' = -[\max\{(|\lambda_3 + \lambda_4| - 2s_{in}), 0\} + \max\{|\lambda|, |\mu|\}]$$

Configuration	Exponent	
	e'	ε'
$\sum_i \lambda_i$ even	f'^-	$f'^+ - 1$
$\sum_i \lambda_i$ odd	$f'^+ - 1$	f'^-

3. – Crossing matrix for helicity amplitudes.

Let $M^s_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t)$ and $M^t_{\lambda_1'\lambda_3';\lambda_4'\lambda_2'}(s,t)$ be respectively the helicity amplitudes for the two reactions:

$$1+2\to 3+4 \text{ with momenta } p_i, \text{ helicities } \lambda_i$$

and

$$\bar{4}+2\to 3+\bar{1} \text{ with momenta } q_i, \text{ helicities } \lambda_i'$$

as defined from the corresponding spinor amplitudes.

We assume that the crossing properties of the spinor amplitudes which *have been proved* by BROS, EPSTEIN and GLASER (6) in the case of four massive particles, are still valid when massless particles are involved. With this assumption, all the arguments of C-T.M.N can be exactly reproduced. Since we can get a continuation path which stays constantly far away from the kinematical singularities, the precise location of which depends on the masses, the crossing matrix is expected not to be affected by setting one or several masses equal to zero (*). From Table I of ref. (1), we expect that for a massless particle i $\chi_i=0$ (respectively $\chi_i=\pm\pi$) if this particle is uncrossed (respectively crossed). In other terms, the helicity is unchanged if the massless particle is uncrossed and changed into its opposite if it crossed. Let us prove that this hint gives the right result.

3·1. *One particle, say particle* 1, *is massless.* – Since we are not concerned with massive particles, we write formally

in the s-channel $1+2\to 3+4$

$$M^s_{|\lambda_1|;\lambda_4}(s,t) = D^{|\lambda_1|}\big(L_{12}(p_1)\big)^{A_1}{}_{|\lambda_1|}\,\mathscr{M}^s_{A_1;A_4}(p_1p_2;\,p_3p_4)\overset{\otimes}{\prod_i} D^{s_i}\big(L_{12}(i)\big)^{A_i}{}_{\lambda_i},$$

$$M^s_{-|\lambda_1|;\lambda_4}(s,t) = D^{|\lambda_1|}\big(L_{12}^{\dagger-1}(p_1)\big)^{A_1}{}_{-|\lambda_1|}\,\mathscr{M}^s_{\tilde{A}_1;A_4}(p_1p_2;\,p_3p_4)\overset{\otimes}{\prod_i} D^{s_i}\big(L_{12}(i)\big)^{A_i}{}_{\lambda_i};$$

in the t-channel $\bar{4}+2\to 3+\bar{1}$

$$M^t_{|\lambda_1|;\lambda_3'}(s,t) = D^{|\lambda_1|}\big(\varepsilon^{-1}L^*_{13}(q_1)\big)^{A_1}{}_{\lambda_1}\,\mathscr{M}^t_{\tilde{A}_1;A_4}(q_4q_2;\,q_3q_1)\overset{\otimes}{\prod_i} D^{s_i}\big(L_{13}(i)\big)^{A_i}{}_{\lambda_i'},$$

$$\big(\langle q_1,\,|\lambda_1|\,\big| = D^{|\lambda_1|}\big(\varepsilon^{-1}L^*_{13}(q_1)\big)^{A_1}{}_{\lambda_1}\,\langle q_1,\,+|\lambda_1|,\,\tilde{A}_1|\big)\,,$$

$$M^t_{-|\lambda_1|;\lambda_3'}(s,t) = D^{|\lambda_1|}\big(\varepsilon L_{13}^{T-1}(q_1)\big)^{A_1}{}_{-|\lambda_1|}\,\mathscr{M}^t_{A_1;A_4}(q_4q_2;\,q_3q_1)\overset{\otimes}{\prod_i} D^{s_i}\big(L_{13}(i)\big)^{A_i}{}_{\lambda_i'}.$$

The indices A_i, λ_i, λ_i', s_i correspond to massive-particle indices.

(*) This fact has been already noticed by MUELLER and TRUEMAN (12).

(12) A. H. MUELLER and T. L. TRUEMAN: *Phys. Rev.*, 160, 1306 (1967).

The assumed crossing properties of the spinor amplitudes read

$$\mathscr{M}^{tc}_{\lambda_1;\lambda_4}(-p_4p_2;\, p_3-p_1)=\mathscr{M}^{s}_{\lambda_1;\lambda_4}(p_1p_2;\, p_3p_4)(-1)^{\sigma(P)},$$
$$\mathscr{M}^{tc}_{\dot\lambda_1;\dot\lambda_4}(-p_4p_2;\, p_3-p_1)=\mathscr{M}^{s}_{\dot\lambda_1;\dot\lambda_4}(p_1p_2;\, p_3p_4)(-1)^{\sigma(P)},$$

where $\sigma(P)=1$ if 1 and 4 are fermions, and $\sigma(P)=0$ in all other cases. The subscript c means that $\mathscr{M}^{t}(q_i)$ has been analytically continued along the Bros-Epstein-Glaser path C to the values $q_1=-p_1$, $q_2=p_2$, $q_3=p_3$, $q_4=-p_4$ of the four-momenta.

Then $M^{s}_{-|\lambda_1|;\lambda_4}$ is related to $M^{t}_{|\lambda_1|;\lambda'_4}$ and $M^{s}_{|\lambda_1|;\dot\lambda_4}$ to $M^{t}_{-|\lambda_1|;\dot\lambda'_4}$ (*) by

$$(3.1)\quad \begin{cases} M^{s}_{|\lambda_1|;\lambda_4} = (-1)^{\sigma(P)}D^{|\lambda_1|}\big[\varepsilon^{-1}L^{-1c}_{13}(-p_1)L_{12}(p_1)\big]^{-|\lambda_1|}_{|\lambda_1|}\cdot \\ \qquad\qquad \cdot M^{t}_{-|\lambda_1|;\lambda'_4}\overset{\otimes}{\prod_i} D^{s_i}\big(L^{-1c}_{31}(i)L_{12}(i)\big)^{\lambda'_i}_{\lambda_i}, \\ M^{s}_{-|\lambda_1|;\dot\lambda_4} = (-1)^{\sigma(P)}D^{|\lambda_1|}\big[\varepsilon\{L^{\dagger}_{13}(-p_1)\}^{c}L^{\dagger-1}_{12}(p_1)\big]^{|\lambda_1|}_{-|\lambda_1|}\cdot \\ \qquad\qquad \cdot M^{t}_{|\lambda_1|;\dot\lambda'_4}\overset{\otimes}{\prod_i} D^{s_i}\big(L^{-1c}_{31}(i)L_{12}(i)\big)^{\dot\lambda'_i}_{\dot\lambda_4}. \end{cases}$$

Let us consider the Lorentz transformation $\mathscr{L}(p_1)=L^{-1c}_{13}(-p_1)L_{12}(p_1)$ which acts on the standard axes according to

$$\mathscr{L}(p_1)\begin{Bmatrix}\overset{\circ}{k}\\ \overset{\circ}{n}_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\overset{\circ}{k}\\ -\overset{\circ}{n}_2\end{Bmatrix}$$

where $\overset{\circ}{k}=(1;001)$ $\big(n^{13c}_{2}(-p_1)=-W^{s}=-n^{12}_{2}(p_1)\big)$.

Let $\mathscr{L}'(p_1)$ be the 2×2 matrix which accompanies $\mathscr{L}(p_1)$ in the definition of the complex Lorentz transformation $\big(\mathscr{L}(p_1),\,\mathscr{L}'(p_1)\big)$. By definition $\mathscr{L}'(p_1)$ is the product of $L^{\dagger}_{12}(p_1)$ by the analytic continuation of $L^{-1\dagger}_{13}(q_1)$ and can be different from the Hermitian conjugate $\mathscr{L}^{\dagger}(p_1)$ (**).

It is easily seen that $\big(\mathscr{L}(p_1),-\mathscr{L}'(p_1)\big)$ transforms the standard axes according to

$$(3.2)\qquad \big(\mathscr{L}(p_1),-\mathscr{L}'(p_1)\big)\begin{Bmatrix}\overset{\circ}{k}\\ \overset{\circ}{n}_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\overset{\circ}{k}\\ \overset{\circ}{n}_2\end{Bmatrix},$$

so that $\mathscr{L}'(p_1)=-\mathscr{L}^{\dagger}(p_1)$.

(*) This is the consequence of the fact that undotted spinor indices correspond to a positive helicity and dotted indices to a negative helicity.

(**) It is quite possible that $[L^{-1\dagger}_{13}]^{c}\neq[L^{-1c}_{13}]^{\dagger}$ because the analytic continuation of $L^{\dagger}_{31}(q_1)$ along the path C is the Hermitian conjugate of that of $L_{31}(q_1)$ along the path C^{*}, complex conjugate of C.

Then we deduce

$$[L_{13}^{\dagger}(-p_1)]^{c} L_{13}^{\dagger-1}(p_1) = \mathscr{L}'^{-1}(p_1) = -\mathscr{L}^{\dagger-1}(p_1) .$$

Formula (3.2) shows that $\mathscr{L}(p_1)$ is a Lorentz transformation of the little group of $\mathring{k}$ leaving $\mathring{n}_2$ invariant

$$\mathscr{L}(p_1) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ where } x \text{ is any real number.}$$

Noting that

$$D^{|\lambda_1|}\big(\varepsilon^{-1}\mathscr{L}(p_1)\big)^{-|\lambda_1|}{}_{|\lambda_1|} = D^{|\lambda_1|}\big(\varepsilon\mathscr{L}^{\dagger-1}(p_1)\big)^{|\lambda_1|}{}_{-|\lambda_1|} = \varphi ,$$

where $\varphi = \pm 1$ depends on $|\lambda_1|$ and using formula (3.1), the crossing matrix reads

$$M^{s}_{\lambda_1;\lambda_i} = (-1)^{\sigma(P)}\varphi(-1)^{|\lambda_1|-\lambda_1} M^{t}_{-\lambda_1;\lambda_i'} \overset{\otimes}{\prod_i} D^{s_i}\big(L_{31}^{-1c}(i) L_{12}(i)\big)^{\lambda_i'}{}_{\lambda_i} . \tag{3.3}$$

3·2. *Particle 2 is massless.*

in the s-channel $1 + 2 \to 3 + 4$

$$\begin{cases} M^{s}_{|\lambda_2|;\lambda_i} = D^{|\lambda_2|}\big(L_{12}(p_2)\big)^{\lambda_2}{}_{|\lambda_2|}\, \mathscr{M}^{s}_{\lambda_2;\lambda_i}(p_1p_2;\, p_3p_4) \overset{\otimes}{\prod_i} D^{s_i}\big(L_{12}(i)\big)^{\lambda_i}{}_{\lambda_i} , \\ M^{s}_{-|\lambda_2|;\lambda_i} = D^{|\lambda_2|}\big(L_{12}^{\dagger-1}(p_2)\big)^{\lambda_2}{}_{-|\lambda_2|}\, \mathscr{M}^{s}_{\tilde{\lambda}_2;\lambda_i}(p_1p_2;\, p_3p_4) \overset{\otimes}{\prod_i} D^{s_i}\big(L_{13}(i)\big)^{\lambda_i}{}_{\lambda_i} , \end{cases}$$

in the t-channel $\overline{4} + 2 \to 3 + \overline{1}$

$$\begin{cases} M^{t}_{|\lambda_2|;\lambda_i'} = D^{|\lambda_2|}\big(L_{13}(q_2)\big)^{\lambda_2}{}_{|\lambda_2|}\, \mathscr{M}^{t}_{\lambda_2;\lambda_i}(q_1q_2;\, q_3q_1) \overset{\otimes}{\prod_i} D^{s_i}\big(L_{13}(i)\big)^{\lambda_i}{}_{\lambda_i'} , \\ M^{t}_{-|\lambda_2|;\lambda_i'} = D^{|\lambda_2|}\big(L_{13}^{\dagger-1}(q_2)\big)^{\lambda_2}{}_{-|\lambda_2|}\, \mathscr{M}^{t}_{\tilde{\lambda}_2;\lambda_i}(q_1q_2;\, q_3q_1) \overset{\otimes}{\prod_i} D^{s_i}\big(L_{13}(i)\big)^{\lambda_i}{}_{\lambda_i'} . \end{cases}$$

Now $M^{s}_{|\lambda_2|;\lambda_i}$ is related to $M^{t}_{|\lambda_2|;\lambda_i'}$ and $M^{s}_{-|\lambda_2|;\lambda_i}$ to $M^{t}_{-|\lambda_2|;\lambda_i'}$ by

$$\begin{cases} M^{s}_{|\lambda_2|;\lambda_i} = (-1)^{\sigma(P)} D^{|\lambda_2|}\big[L_{13}^{-1c}(p_2) L_{12}(p_2)\big]^{\lambda_2}{}_{|\lambda_2|}\, M^{t}_{|\lambda_2|;\lambda_i'} \overset{\otimes}{\prod_i} D^{s_i}\big(L_{13}^{-1c}(i) L_{12}(i)\big)^{\lambda_i'}{}_{\lambda_i} , \\ M^{s}_{-|\lambda_2|;\lambda_i} = (-1)^{\sigma(P)} D^{|\lambda_2|}\big[\{L_{13}^{\dagger}(p_2)\}^{c} L_{12}^{\dagger-1}(p_2)\big]^{-|\lambda_2|}{}_{-|\lambda_2|} M^{t}_{-|\lambda_2|;\lambda_i'} \overset{\otimes}{\prod_i} D^{s_i}\big(L_{13}^{-1c}(i) L_{12}(i)\big)^{\lambda'}{}_{\lambda_i} . \end{cases} \tag{3.4}$$

Let us consider the Lorentz transformation $\mathscr{L}(p_2) = L_{13}^{-1c}(p_2) L_{12}(p_2)$ which acts on the standard axes according to

$$\mathscr{L}(p_2) \begin{Bmatrix} \mathring{k} \\ \mathring{n}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathring{k} \\ -\mathring{n}_2 \end{Bmatrix}.$$

Let $\mathscr{L}'(p_2)$ be the 2×2 matrix which accompanies $\mathscr{L}(p_2)$ in the definition of the Lorentz transformation $(\mathscr{L}(p_2), \mathscr{L}'(p_2))$.

It is easily seen that $(\mathscr{L}(p_2), \mathscr{L}'(p_2))$ transforms the standard axes according to

$$(\mathscr{L}(p_2), \mathscr{L}'(p_2)) \begin{Bmatrix} \mathring{k} \\ \mathring{n}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathring{k} \\ -\mathring{n}_2 \end{Bmatrix},$$

so that $\mathscr{L}'(p_2) = \mathscr{L}(p_2)^{\dagger}$.

$\mathscr{L}(p_2)$ is again a transformation of the little group of $\mathring{k}$. We write $\mathscr{L}(p_2) = R_3(\pi)\,\mathscr{L}''(p_2)$ where $R_3(\pi)$ is a rotation through an angle π around the 3-axis and where $\mathscr{L}''(p_2)$ belong to the little group of $\mathring{k}$ and leaves $\mathring{n}_2$ invariant.

Noting that

$$D^{|\lambda_3|}\big(R_3(\pi)\,\mathscr{L}''(p_2)\big)^{|\lambda_3|}_{|\lambda_3|} = \exp\left[-i\pi|\lambda_2|\right]\varphi'$$

and

$$D^{|\lambda_3|}\big(R_3^{\dagger-1}(\pi)\,\mathscr{L}''^{\dagger-1}(p_2)\big)^{-|\lambda_3|}_{-|\lambda_3|} = \exp\left[i\pi|\lambda_2|\right]\varphi' = \exp\left[-i\pi\lambda_2\right]\varphi',$$

where φ' depends on $|\lambda_2|$, and using formula (3.4), the crossing matrix in this case reads

$$M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = (-1)^{\sigma(P)}\varphi' \exp\left[-i\pi\lambda_2\right] M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1'\lambda_2'} \prod_i D^{s_i}\big(L_{13}^{-1c}(i) L_{12}(i)\big)^{\lambda_i'}_{\lambda_i}. \tag{3.5}$$

We show now that our crossing matrix is obtained from that of C-T.M.N by putting the relevant mass m_i equal to zero.

This crossing matrix can be written (formula (3.7) of ref. [1])

$$M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \eta^{s}(-1)^{\sigma(P)} \exp\left[-i\pi(\lambda_2-\lambda_3)\right] \sum_{\{\lambda_i'\}} (-1)^{\lambda_3-\lambda_3'+s_4+\lambda_4-s_1-\lambda_1'} \cdot d^{s_1}(\chi_1')^{-\lambda_1'}_{\lambda_1} d^{s_2}(-\chi_2')^{\lambda_2'}_{\lambda_2} d^{s_3}(-\chi_3')^{-\lambda_3'}_{-\lambda_3} d^{s_4}(\chi_4')^{\lambda_4'}_{-\lambda_4} M^{s}_{\lambda_3'\lambda_4';\lambda_1'\lambda_2'}, \tag{3.6}$$

where the angle χ_i' is defined in ref. [1] (Chap. III, Sect. 3·2) and $\eta_s = (-1)^{2s_1+2s_4}$.

a) Case $m_1 = 0$. (The massless particle is crossed.)

We write the formula (3.3) explicitly and get up to a sign independent

of the helicities

$$(3.7)\qquad M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = (-1)^{|\lambda_1|-\lambda_1}(-1)^{\sigma(P)}\exp[-i\pi(\lambda_2-\lambda_3)]\sum_{\{\lambda_i'\}}(-1)^{\lambda_3'-\lambda_3+s_4+\lambda_4}\cdot d^{s_3}(-\chi_2')^{\lambda_3'}{}_{\lambda_2}\, d^{s_3}(-\chi_3')^{-\lambda_3'}{}_{-\lambda_2}\, d^{s_4}(\chi_4')^{\lambda_4'}{}_{-\lambda_4} M^{t}_{\lambda_3'-\lambda_1;\lambda_4'\lambda_2'}.$$

If we put $m_1 = 0$ in formula (3.6), then $\cos\chi_1' = +1$, $s_1 = |\lambda_1|$, $d^{s_1}(\chi_1')^{-\lambda_1'}{}_{\lambda_1} = \delta^{\lambda_1'}{}_{-\lambda_1}$ and we get

$$(3.8)\qquad M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \eta^{s}(-1)^{|\lambda_1|-\lambda_1}(-1)^{\sigma(P)}\exp[-i\pi(\lambda_2-\lambda_3)]\sum_{\{\lambda_i'\}}(-1)^{\lambda_3'-\lambda_3+s_4+\lambda_4}\cdot d^{s_3}(-\chi_2')^{\lambda_3'}{}_{\lambda_2}\, d^{s_3}(-\chi_3')^{-\lambda_3'}{}_{-\lambda_2}\, d^{s_4}(\chi_4')^{\lambda_4'}{}_{-\lambda_4} M^{t}_{\lambda_3'-\lambda_1;\lambda_4'\lambda_2'}.$$

We then verify that formulae (3.7) and (3.8) coincide, up to a sign.

b) Case $m_2 = 0$. (The massless particle is uncrossed.) Up to a sign, formula (3.5) reads explicitly

$$(3.9)\qquad M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = (-1)^{\sigma(P)}\exp[-i\pi\lambda_2]\exp[i\pi\lambda_3]\sum_{\{\lambda_i'\}}(-1)^{\lambda_3'-\lambda_3+s_4+\lambda_4-s_1-\lambda_1'}\cdot d^{s_1}(\chi_1')^{-\lambda_1'}{}_{\lambda_1}\, d^{s_3}(\chi_3')^{-\lambda_3'}{}_{-\lambda_3}\, d^{s_4}(\chi_4')^{\lambda_4'}{}_{-\lambda_4} M^{t}_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2}.$$

Now if we put $m_2 = 0$ in formula (3.6) then

$$\chi_2' = +1\,, \qquad s_2 = |\lambda_2|\,, \qquad d^{|\lambda_2|}(-\chi_2')^{\lambda_2}{}_{\lambda_2'} = \delta^{\lambda_2}{}_{\lambda_2'}$$

and we get

$$(3.10)\qquad M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = (-1)^{\sigma(P)}\exp[-i\pi\lambda_2]\exp[i\pi\lambda_3]\sum_{\{\lambda_i'\}}(-1)^{\lambda_3'-\lambda_3+s_4+\lambda_4-s_1-\lambda_1'}\cdot d^{s_1}(\chi_1')^{-\lambda_1'}{}_{\lambda_1}\, d^{s_3}(\chi_3')^{-\lambda_3'}{}_{-\lambda_3}\, d^{s_4}(\chi_4')^{\lambda_4'}{}_{-\lambda_4} M^{t}_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2}.$$

Again eq. (3.9) and eq. (3.10) are identical up to a sign. As far as the over-all unknown sign in formulae (3.7) and (3.9) is concerned, one can see that the reasoning which leads to the calculation of η^s in the nonzero mass case does not depend on the actual values of the masses.

Furthermore, the same kind of results hold when more than one particle is massless.

3·3. *Conclusion.* – The crossing matrix of C-T.M.N. is valid in the case of reactions involving massless particles under the assumption that the results of Bros, Epstein and Glaser (6) can be extended to the case when some particles are massless.

In Table XIV, we summarize the result of C-T.M.N. In this Table $d^{s_1}(\chi_1)^{\lambda_1'}$ (respectively $d^{s_4}(\chi_4)^{\lambda_4'}{}_{\lambda_4}$) is equal to $(-1)^{|\lambda_1|-\lambda_1}\delta^{\lambda_1'}{}_{-\lambda_1}$ (respectively $(-1)^{|\lambda_4|+\lambda_4}\delta^{\lambda_4'}{}_{-\lambda_4}$), if m_1 (respectively m_4) is equal to zero, and $d^{s_2}(\chi_2)^{\lambda_2'}{}_{\lambda_2}$ (respectively $d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda_3'}{}_{\lambda_3}$) is equal to $\delta^{\lambda_2'}{}_{\lambda_2}$ (respectively $\delta^{\lambda_3'}{}_{\lambda_3}$) if m_2 (respectively m_3) is equal to zero.

For instance if $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0$, Table XIV reads

$$M^s_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t) = (-1)^{\sigma(P)}(-1)^{2|\lambda_3|}\exp[i\pi(\lambda_2-\lambda_3)](-1)^{|\lambda_1|-\lambda_1+|\lambda_4|-\lambda_4}\cdot M^t_{\lambda_3-\lambda_1;-\lambda_4\lambda_2}(s,t)\,. \tag{3.11}$$

TABLE XIV. – *The crossing matrix for helicity amplitudes.*

$$M^{(s)}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t,u) = (-)^{\sigma(P)+2s_3+2s_4}\cdot\exp[i\pi(\lambda_2-\lambda_3)]\sum_{\lambda_i'} d^{s_1}(\chi_1)^{\lambda_i}{}_{\lambda_1} d^{s_2}(\chi_2)^{\lambda_3}{}_{\lambda_2} d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda_3}{}_{\lambda_3} d^{s_4}(\chi_4)^{\lambda_4}{}_{\lambda_4} M^{(t)}_{\lambda_1'\lambda_2';\lambda_3'\lambda_4'}(s,t,u)$$

$\sigma(P) = 1$ if 1 and 4 are fermions and 0 in all other cases;

$$\cos\chi_1 = -\frac{(s+m_1^2-m_2^2)(t+m_1^2-m_3^2)+2m_1^2\Delta}{\mathscr{S}_{12}\mathscr{T}_{31}} \qquad \sin\chi_1 = \frac{2m_1\sqrt{\Phi}}{\mathscr{S}_{12}\mathscr{T}_{31}}$$

$$\cos\chi_2 = \frac{(s+m_2^2-m_1^2)(t+m_2^2-m_4^2)-2m_2^2\Delta}{\mathscr{S}_{12}\mathscr{T}_{42}} \qquad \sin\chi_2 = \frac{2m_2\sqrt{\Phi}}{\mathscr{S}_{12}\mathscr{T}_{42}}$$

$$\cos\chi_3 = \frac{(s+m_3^2-m_4^2)(t+m_3^2-m_1^2)-2m_3^2\Delta}{\mathscr{S}_{34}\mathscr{T}_{31}} \qquad \sin\chi_3 = -\frac{2m_3\sqrt{\Phi}}{\mathscr{S}_{34}\mathscr{T}_{31}}$$

$$\cos\chi_4 = -\frac{(s+m_4^2-m_3^2)(t+m_4^2-m_2^2)+2m_4^2\Delta}{\mathscr{S}_{34}\mathscr{T}_{42}} \qquad \sin\chi_4 = -\frac{2m_4\sqrt{\Phi}}{\mathscr{S}_{34}\mathscr{T}_{42}}$$

$$\Delta = m_2^2+m_3^2-m_4^2-m_1^2$$

4. – Kinematical constraints.

In the crossing matrix of Table XIV, we can express M^s and M^t as functions of the R.H.A., $\mathscr{F}^{(s)}$ and $\mathscr{F}^{(t)}$, which have been defined in Sect. 2.

The crossing relation then becomes

$$\mathscr{F}^{(s)}_{\{\lambda\}} = X^{\{\lambda'\}}_{\{\lambda\}}\mathscr{F}^{t}_{\{\lambda'\}}\,,$$

where the crossing matrix X enjoys the following properties:

i) X is uniform since $\mathscr{F}^s$ and $\mathscr{F}^t$ do not have any kinematical singularities (except in some case where a $\sqrt{s}$ and/or a $\sqrt{t}$ singularity cannot be removed).

ii) X is furthermore a rational function of s and t since it is uniform and can be expressed in terms of algebraic functions. We write $X^{\{\lambda'\}}_{\{\lambda\}} = P/Q$ where P and Q are polynomials.

iii) Since $\mathscr{F}^s_{\{\lambda\}}$ is kinematically finite, zeros of Q have to be cancelled out by zeros of some combinations of the functions $\mathscr{F}^t_{\{\lambda'\}}$. The study of this problem is the purpose of this Section.

In the case of four massive particles, C-T.M.N. have solved this problem by introducing transversity amplitudes ([12]), the crossing matrix of which is « diagonal ». An analogous procedure can be used when massless particles are involved. Since the part of the crossing matrix corresponding to the massless particle is already « diagonalized » ($\chi = 0$ or π), it is sufficient to diagonalize the 2×2 matrices $d^{s_i}(\chi_i)^{\lambda_i}_{\lambda_i}$ corresponding to the massive particles i.

According to KOTANSKI ([13]), we introduce the matrix $D^s(R)$ which diagonalizes the matrices $d^s(\chi)$:

$$[D^s(R)\, d^s(\chi)\, D^s(R^*)]^\lambda_\tau = \exp[i\chi\tau]\,\delta^\lambda_\tau\,,$$
$$[D^s(R^*)\, d^s(\chi)\, D^s(R)]^\lambda_\tau = \exp[-i\chi\tau]\,\delta^\lambda_\tau\,.$$

R is a rotation through $-\pi/2$ around the first axis; it is specified by Euler angles $\pi/2$, $\pi/2$, $-\pi/2$.

For instance, if only particle 1 is massless, we define the amplitudes

$$T^s_{\tau_3\tau_4;\lambda_1\tau_2} = D^{s_3}(R)^{\lambda_3}_{\tau_3}\, D^{s_2}(R^*)^{\lambda_2}_{\tau_2}\, D^{s_4}(R^*)^{\lambda_4}_{\tau_4}\, M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\,.$$

Then the crossing matrix for these amplitudes reads

$$T^t_{-\tau_2-\lambda_1;-\tau_4-\tau_3} = \varphi\exp[-i(\tau_2\chi_2-\tau_3\chi_3+\tau_4\chi_4)]\,T^s_{\tau_3\tau_4;\lambda_1\tau_2}\,,$$

where φ is a phase factor.

4·1. *Kinematical constraints in the case of one massless particle.* – The procedure is identical to that of C-T.M.N. Let us assume that $m_1 = 0$. Since $T^t_{-\tau_2-\lambda_1;-\tau_4-\tau_3}$ is kinematically regular at $s = m_2^2$, $\mathscr{S}_{34} = 0$; and $s = 0$, $T^s_{\tau_3\tau_4;\lambda_1\tau_2}$ has to cancel all singularities which may appear in

$$\exp[-i(\tau_2\chi_2-\tau_3\chi_3+\tau_4\chi_4)]\,.$$

The behaviour of the function

$$\exp[-i(\tau_2\chi_2-\tau_3\chi_3+\tau_4\chi_4)]$$

([13]) A. KOTANSKI: *Acta Phys. Polon.*, 29, 699 (1966); 30, 629 (1966).

in the neighbourhood of $s = m_2^2$ and $\mathscr{S}_{34} = 0$ is summarized in the Table XV.

Table XV is the analogue of the Table XV of ref. (1), where m_1 is set equal to zero:

$$\varphi_{12} = \psi_{12} = s - m_2^2 \quad \text{and} \quad \chi_1 = -\pi .$$

From the regularization (Table II), one sees that

$$s_{34}{}^{s_3+s_4}(s-m_2^2)^{s_2} T^s_{\tau_3\tau_4;\lambda_1\tau_2} = \tilde{T}^s_{\tau_3\tau_4;\lambda_1\tau_2}$$

is finite at $\mathscr{S}_{34} = 0$ and $s - m_2^2 = 0$.

TABLE XV.

near $s = m_2^2$,	$\exp[i\theta_s] \simeq (s-m_2^2)^{\pm 1}$	$\leftrightarrow \exp[+i\chi_2] \simeq (s-m_2^2)^{\pm 1}$
near $s = (m_3+m_4)^2$,	$\exp[i\theta_s] \simeq \varphi_{34}^{\pm 1}$	$\leftrightarrow \exp[-i(\chi_3-\chi_4)] \simeq \varphi_{34}^{\pm 2}$
near $s = (m_3-m_4)^2$,	$\exp[i\theta_s] \simeq \psi_{34}^{\pm 1}$	$\leftrightarrow \exp[-i(\chi_3+\chi_4)] \simeq \psi_{34}^{\pm 2\varepsilon_{34}}$

where

$$\varepsilon_{34} = \frac{m_3-m_4}{|m_3-m_4|}$$

Table XV allows us to write the kinematical constraints in terms of the amplitudes $\tilde{T}^s_{\tau_3\tau_4;\lambda_1\tau_2}$.

(4.1)

near $s = m_2^2$

$$\tilde{T}^s_{\tau_3\tau_4;\lambda_1\tau_2} \simeq (s-m_2^2)^{s_2\pm\tau_2}, \qquad \text{if } \exp[i\theta_s] \simeq (s-m_2^2)^{\pm 1}.$$

near $\varphi_{34} = 0$

$$\tilde{T}^s_{\tau_3\tau_4;\lambda_1\tau_2} \simeq \varphi_{34}{}^{s_3+s_4\pm(\tau_3+\tau_4)}, \qquad \text{if } \exp[i\theta_s] \simeq \varphi_{34}^{\pm 1}.$$

near $\psi_{34} = 0$

$$\tilde{T}^s_{\tau_3\tau_4;\lambda_1\tau_2} \simeq \psi_{34}^{s_3+s_4\pm\varepsilon_{34}(\tau_3-\tau_4)}, \qquad \text{if } \exp[i\theta_s] \simeq \psi_{34}^{\pm 1}.$$

The interpretation and the practical applications of eqs. (4.1) have been fully explained in C-T.M.N. One sees that eq. (4.1) can be deduced from eq. (4.11) of ref. (1) by suppressing the variables s_1 and τ_1 in the exponents which occur in this equation (*). This is the procedure to be followed whatever

(*) For convenience eqs. (4.11), (A-IV.1) and (A-IV.2) of ref. (1) are reproduced in Table XVI. If $m_i = 0$, $\varphi_{ij} = \psi_{ij}$ has to be replaced by $(s-m_j^2)$.

the massless particle is (1, 2, 3 or 4). If $m_3 = m_4 \neq 0$ (respectivcly $m_1 = m_2 \neq 0$), this procedure has to be applied to formulae (A-IV.1) (respectively (A-IV.2)) of ref. (1).

4·2. *Kinematical constraints in the case of two massless particles.*

4·2.1. *Case of* $m_1 = 0$; $m_3 = 0$.

In the case of 2 massless particles 1 and 3 eq. (4.8) of ref. (1) reads

$$(s - m_4^2)^{s_4} (s - m_2^2)^{s_2} T^s_{\lambda_3 \tau_4; \lambda_1 \tau_2} = \tilde{T}^s_{\lambda_3 \tau_4; \lambda_1 \tau_2} . \tag{4.2}$$

Near $s = m_2^2$

$$\tilde{T}^s_{\lambda_3 \tau_4; \lambda_1 \tau_2} \simeq (s - m_2^2)^{s_2 \pm \tau_2} , \qquad \text{if } \exp[i\theta_s] \simeq (s - m_2^2)^{\pm 1} .$$

Near $s = m_4^2$

$$\tilde{T}^s_{\lambda_3 \tau_4; \lambda_1 \tau_2} \simeq (s - m_4^2)^{s_4 \pm \tau_4} , \qquad \text{if } \exp[i\theta_s] \simeq (s - m_4^2)^{\pm 1} .$$

In the case $m_2 = m_4 = m$ these equations are modified as follows:

$$(s - m^2)^{s_2 + s_4} T^s_{\lambda_3 \tau_4; \lambda_1 \tau_2} = \tilde{T}^s_{\lambda_3 \tau_4; \lambda_1 \tau_2} .$$

Near $s = m^2$

$$\tilde{T}^s_{\lambda_3 \tau_4; \lambda_1 \tau_2} \simeq (s - m^2)^{s_2 + s_4 \pm (\tau_2 + \tau_4)} , \qquad \text{if } \exp[i\theta_s] \simeq (s - m^2)^{\pm 2} .$$

4·2.2. *Case of* $m_1 = m_2 = 0$; $m_3 \neq m_4$.

a) Constraints at $\mathscr{S}_{34} = 0$.
Use Table XVI.

b) Study near $s = 0$.
Here we directly use crossing for helicity amplitudes (Table XIV)

$$M^s_{\lambda_3' - \lambda_1; \lambda_4' \lambda_2} = \varphi d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda_3}{}_{\lambda_3'} d^{s_4}(-\chi_4)^{\lambda_4}{}_{\lambda_4'} M^s_{\lambda_3 \lambda_4; \lambda_1 \lambda_2} , \tag{4.3}$$

where φ is a phase factor; near $s = 0$

$$\mathscr{S}_{34} = -\varepsilon \varepsilon_{34} (m_3^2 - m_4^2) + O(s) ,$$

$$\cos \chi_3 = \cos \chi_4 = -\varepsilon \varepsilon_{34} + O(s) , \qquad \cos \theta_t = 1 + O(s) ,$$

we deduce

$$d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda_3'}{}_{\lambda_3} \simeq \sqrt{s}^{|\lambda_3' + \varepsilon \varepsilon_{34} \lambda_3|} , \qquad d^{s_4}(-\chi_4)^{\lambda_4'}{}_{\lambda_4} \simeq \sqrt{s}^{|\lambda_4' + \varepsilon \varepsilon_{34} \lambda_4|}$$

and

$$M^{t}_{\lambda_3'-\lambda_1;\lambda_4'\lambda_2} \simeq \left(\sin\left(\frac{\theta_t}{2}\right)\right)^{|\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3'-\lambda_4'|} \simeq \sqrt{s}^{|\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3'-\lambda_4'|}.$$

From regularization (see formula (2.30)), $M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ behaves near $s=0$ like $\sqrt{s}^{|\lambda_1+\lambda_2-\varepsilon\varepsilon_{34}\mu|}$.

Using (4.3) it is easy to see that there is *no kinematical constraint* at $s=0$ since

$$\min_{\{\lambda_3,\lambda_4\}} \left(|\lambda_3+\varepsilon\varepsilon_{34}\lambda_3'| + |\lambda_4+\varepsilon\varepsilon_{34}\lambda_4'| + |\lambda_1+\lambda_4-\varepsilon\varepsilon_{34}\mu|\right) = |\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3'-\lambda_4'|.$$

4·2.3. *Case of* $m_3=m_4$; $m_1\neq m_2$.

a) Constraint at $\mathscr{S}_{12}=0$.
Use Table XVI.

b) Study near $s=0$.
In the same way as in Sect. 4·2.2, *b*) above, we obtain that there is no kinematical constraint at $s=0$.

4·2.4. *Case of* $m_1=m_2=0$; $m_3=m_4=m'$.

a) Constraints at $s=4m'^2$.
Use Table XVI.

b) Constraints at $s=0$.
Here ψ_{34} coincides with $\sqrt{s}$.
The inverse crossing relation reads (see formula (4.3))

$$M^{t}_{\lambda_3'-\lambda_1;\lambda_4'\lambda_2} = \varphi \sum_{\{\lambda_3,\lambda_4\}} d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda_3\lambda_3'} d^{s_4}(-\chi_4)^{\lambda_4\lambda_4'} M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}; \tag{4.4}$$

near $s=0$,

$$M^{t}_{\lambda_3'-\lambda_1;\lambda_4'\lambda_2} \simeq \sqrt{s}^{|\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3'-\lambda_4'|}, \qquad \cos\chi_3 = -\cos\chi_4 \simeq \sqrt{s}\left(1+O(s)\right).$$

From the regularization (see Appendix I)

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq \sqrt{s}^{A_{\min}} \qquad \text{where} \qquad A_{\min} = \max\left\{\left(|\lambda_1+\lambda_2|-2s_f\right), 0\right\}.$$

Here the exponent of $\sqrt{s}$ in the left-hand side of eq. (4.4) may be higher than the exponent which appears in the r.h.s. In this case the constraints read

$$\sum_{\{\lambda_3,\lambda_4\}} d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda_3\lambda_3'} d^{s_4}(-\chi_4)^{\lambda_4\lambda_4'} M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq \sqrt{s}^{|\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3'-\lambda_4'|}. \tag{4.5}$$

4·2.5. *Case of* $m_3 = m_4 = 0$; $m_1 = m_2 = m$.

a) Constraints at $s = 4m^2$.
Use Table XVI.

b) Constraints at $s = 0$.
An analogous result holds, namely

$$\sum_{\{\lambda_1\lambda_2\}} d^{s_3}(-\chi_1)^{\lambda_1}{}_{\lambda_1'} d^{s_3}(\chi_2)^{\lambda_2}{}_{\lambda_2'} M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq \sqrt{s}^{|\lambda_3+\lambda_4+\lambda_2'-\lambda_1'|} . \tag{4.6}$$

4·3. *Kinematical constraints in the case of three massless particles.*

4·3.1. *Case of* $m_1 = m_2 = m_4 = 0$.

a) Constraint at $s = m_3^2$.
Use Table XVI.

b) Study at $s = 0$.
The inverse crossing formula reads

$$M^{t}_{\lambda_3'-\lambda_1;-\lambda_4\lambda_2} = \varphi \sum_{\{\lambda_3\}} d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda_3}{}_{\lambda_3'} M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} . \tag{4.7}$$

Near $s = 0$

$$\cos\chi_3 = -1 + O(s) , \qquad d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda_3}{}_{\lambda_3'} \simeq \sqrt{s}^{|\lambda_3+\lambda_3'|} , \qquad \cos\theta_t = 1 + O(s) .$$

From the regularization (see formula (2.33*a*))

$$M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq \sqrt{s}^{|\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4-\lambda_3|} ,$$

$$M^{t}_{\lambda_3'-\lambda_1;-\lambda_4\lambda_2} \simeq \left(\sin\left(\frac{\theta_t}{2}\right)\right)^{|\lambda'-\mu'|} \simeq \sqrt{s}^{|\lambda_4+\lambda_2+\lambda_1+\lambda_3'|} .$$

In this case there are *no kinematical constraints at* $s = 0$ since the minimum of the exponent of the r.h.s. of eq. (4.6) is equal to the exponent of the l.h.s. $\left(\min_{\{\lambda_3\}} |\lambda_4 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3| + |\lambda_3 + \lambda_3'| = |\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_3'|\right)$.

4·3.2. *Case of* $m_1 = m_3 = m_4 = 0$.

a) Constraint at $s = m_2^2$.
Use Table XVI.

b) Study at $s = 0$.
In the same way as in Subsect. 4·3.1, we prove that there are no kinematical constraints at $s = 0$.

TABLE XVI.

Near $\varphi_{12}=0$		
	$\hat{T}^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} \simeq \varphi_{12}^{\varepsilon_1+\varepsilon_2\pm(\tau_1+\tau_2)}$	if $\exp[i\theta_s] \simeq \varphi_{12}^{\pm 1}$
Near $\psi_{12}=0$		
	$\hat{T}^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} \simeq \psi_{12}^{\varepsilon_1+\varepsilon_2\pm\varepsilon_{12}(\tau_1-\tau_2)}$	if $\exp[i\theta_s] \simeq \psi_{12}^{\pm 1}$
Near $\varphi_{34}=0$		
	$\hat{T}^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} \simeq \varphi_{34}^{\varepsilon_3+\varepsilon_4\pm(\tau_3+\tau_4)}$	if $\exp[i\theta_s] \simeq \varphi_{34}^{\pm 1}$
Near $\psi_{34}=0$		
	$\hat{T}^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} \simeq \psi_{34}^{\varepsilon_3+\varepsilon_4\pm\varepsilon_{34}(\tau_3-\tau_4)}$	if $\exp[i\theta_s] \simeq \psi_{34}^{\pm 1}$
Near $s=0$ $(m_1=m_2)$		
	$\sqrt{s}^{2\varepsilon_{\rm in}} T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} \simeq \sqrt{s}^{2\varepsilon_{\rm in}\pm(\tau_1-\tau_2)}$	if $\sqrt{\Phi(s,t)} = \pm\, i m_1(m_3^2-m_4^2)$ at $s=0$
Near $s=0$ $(m_3=m_4)$		
	$\sqrt{s}^{2\varepsilon_f} T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} \simeq \sqrt{s}^{2\varepsilon_f\pm(\tau_3-\tau_4)}$	if $\sqrt{\Phi(s,t)} = \pm\, i m_3(m_1^2-m_2^2)$ at $s=0$

5. – Summary and conclusions.

This study of the helicity amplitudes with respect to their analyticity properties as functions of the invariants leads to the definition of new amplitudes which are analytic in the image of the analyticity domain of the spinor amplitudes in the space of the four-momenta, on the mass shell. Our results hold for a large set of mass cases, whatever spins are involved, and for reactions involving one, two, three or four massless particles. We want to recall that the two basic tools of this work are:

1) The analyticity of the Joos expansion for spinor amplitudes.

2) The gauge condition on these amplitudes, as it has been written down by ZWANZIGER ([5]).

We have also made the assumption that the crossing path of BROS, EPSTEIN, GLASER ([6]) is still valid in our case.

Our results are of three types:

1) The helicity amplitudes can be made free of kinematical singularities by using the same methods as in the case of massive particles.

2) A crossing matrix is derived using an analytic continuation path from one physical region to the other. The result is very simple: under crossing the helicity of a zero-mass particle is reversed; this agrees with the well-known property of photons.

3) By using the so-called transversity amplitudes, for which crossing yields a relation between only one amplitude in the s-channel and another one in the t-channel, one obtains relations between the regularized helicity amplitudes for certain values of the c.m. squared energy.

Applications of this work are quite the same as in the case of massive particles; let us quote them briefly:

1) Phenomenological models which make use of crossing properties, especially Regge-type models: using regularized helicity amplitudes, and crossing relations, taking into account kinematical constraints, we can write phenomenological formulae which are at least « kinematically correct ».

2) On a more theoretical ground another application would be the establishment of low-energy theorems [14] for Compton diffusion in the case of any spin.

* * *

It is a pleasure to thank G. Cohen-Tannoudji, A. Morel, P. Moussa and H. Stern for several fruitful discussions.

We are grateful to M. Froissart and R. Stora for their interest in this work and for straightening out numerous points.

Two of us (J. A. and M. C.) thank Prof. C. Bloch for his kind hospitality at Saclay during the summer.

We also wish to acknowledge Mrs. N. Le Foll for careful typewriting of this paper.

Appendix I

Kinematical singularities in particular mass cases.

A) *One massless particle.*

A_1 $m_3 = m_4 = m'$ $(s_3 = s_4 = s_1)$ (*).

The general study applies to $s = m_2^2$ and φ_{34}. ψ_{34} now coincides with $\sqrt{s}$.

1) Kinematical branch point at $s = 0$.

$\omega_3 = \omega_4 = \sqrt{s}$ $\cos\theta_s \simeq \sqrt{s}$ near $s = 0$, $\dot{a}^{s_1}(B_1)^{\lambda_1}_{\lambda_4} \simeq \sqrt{s}^{\lambda_1}$, $\dot{a}^{s_2}(B_2)^{\lambda_2}_{\lambda_3} \simeq \sqrt{s}^{-\lambda_2}$.

---

[14] A. Pais: *Phys. Rev. Lett.*, 19, 9, 644 (1967).

(*) We assume that when two particles have the same mass $\neq 0$, they are of the same species; in particular they have the same spin. Furthermore we have not studied very pathological cases such as, for instance, $m_2 = m_3 + m_4 \neq 0$; $m_1 = 0$.

In the frame R_I, we use an expansion A' of the spinor amplitudes as functions of two semi-bivectors $e(p_2, p_4)$ and $e(p_2, p_3)$. In the frame R_I, the third components of the semi-bivectors are regular at $s = 0$. We choose the gauge $p_i = p_2$ $(2p_1 \cdot p_2 = s - m^2)$.

One turn around $s = 0$ induces the following changes:

$$\theta \to \pi - \theta \qquad d^s(\theta)^m{}_{m'} \to d^s(\theta)^m{}_{-m'}(-1)^{s+m},$$

$$\frac{\omega_3 - p}{m} \to -\left(\frac{\omega_3 - p}{m}\right)^{-1}, \qquad \frac{\omega_4 - p}{m} \to -\left(\frac{\omega_4 - p}{m}\right)^{-1}.$$

As in the massive-particle case $(m_3 = m_4)$, one finds

(A-I.1) $$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s}) = \eta_{34}(-1)^{\lambda_3+\lambda_4+\lambda}\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s}).$$

2) Kinematical pole at $s = 0$.

Applying the general analysis, one finds that each term of expansion A' behaves like

$$\sqrt{s}^{\lambda_1-\lambda_2-(M_1+M_2)}, \quad \text{or} \quad \sqrt{s}^{-(A_3+A_4)}$$

and since the sum over A_3 and A_4 runs from $-s_f$ to $+s_f$, the worst behaviour will be

(A-I.2) $$\sqrt{s}^{-2s_f}.$$

The results of this case are summarized in Table IX.

A_2 $m_1 = m_2 = m$ $(s_1 = s_2 = s_i)$.

This case is quite analogous to the preceding one. In the same way, we find

(A-I.3) $$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s}) = \eta_{12}(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\mu}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}(\sqrt{s})$$

and

(A-I.4) $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ behaves near $s = 0$ like $\sqrt{s}^{-2s_i}$.

Results are given in Table X.

B) *Two massless particles.*

B_1 $m_2 = m_4 = m$; $m_1 = m_3 = 0$ $(s_2 = s_4)$.

a) Kinematical singularities at $s = m^2$.

We use the frame R_{III} because in this frame the three components of the semi-bivectors $e(p_1, p_4)$ and $e(p_2, p_4)$ are regular and finite at $s = m^2$.

We defined $\omega_1 = \omega_3 = p = k$; $E = \omega_2 = \omega_4$.

Furthermore σp_2, σp_4 and the boosts B_2 and B_4 are regular and finite at $s = m_2^2$.

Turning around $s = m^2$

$$\frac{\theta_s}{4} \to \frac{\theta_s}{4} \pm \pi \qquad \left(\sin\frac{\theta_s}{2} \text{ and } \cos\frac{\theta_s}{2} \simeq \frac{1}{s-m^2}\right),$$

$$B_1 \to -B_1 \quad \text{and} \quad B_3 \to -B_3,$$

which leads to

$$\hat{M}_{\lambda_2\lambda_4;\lambda_1\lambda_3}\left(-\sqrt{s-m^2}\right) = (-1)^{2|\lambda_1|+2|\lambda_2|+2|\lambda_3|+2|\lambda_4|+2s_2+2s_4}\, \hat{M}_{\lambda_2\lambda_4;\lambda_1\lambda_3}\left(\sqrt{s-m^2}\right).$$

Since $s_2 = s_4$ we deduce that $\hat{M}_{\lambda_2\lambda_4;\lambda_1\lambda_3}$ is regular at $s = m^2$.

TABLE XVII.

Frame R_{III}

$$t(R) = \frac{P}{\sqrt{s}}, \qquad n_2(R) = W, \qquad n_3(R) = \frac{q_{12}+q_{34}}{\sqrt{-(q_{12}+q_{34})^2}}$$

$$\boldsymbol{e}(p_2, p_4) = \begin{vmatrix} -Ek\sin\dfrac{\theta_s}{2} \\ +i\dfrac{k^2}{2}\sin\theta_s \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{e}(p_1, p_4) = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2}k\sin\dfrac{\theta_s}{2}(k-E) \\ -\dfrac{i}{2}k^2\sin\theta_s \\ -\dfrac{1}{2}k\cos\dfrac{\theta_s}{2}(k+E) \end{vmatrix}$$

$$L_{12}(1) = R_y\left(-\frac{\theta_s}{2}\right)B_1 \qquad L_{12}(3) = R_y\left(\frac{\theta_s}{2}\right)B_3$$

$$L_{12}(2) = R_y\left(-\frac{\theta_s}{2}+\pi\right)B_2 \qquad L_{12}(4) = R_y\left(\frac{\theta_s}{2}+\pi\right)B_4$$

gauge $p_i = p_4$ for particle 1 $(-2p_1\cdot p_4 = u - m^2)$

$p_i' = p_2$ for particle 3 $(-2p_2\cdot p_3 = u - m^2)$

$\lambda_1 < 0$, $\lambda_3 > 0$.

(A-I.5)
$$M_{\lambda_2\lambda_4;\lambda_1\lambda_3} = \left[\frac{u-m^2}{m}\right]^{2(|\lambda_1|+|\lambda_2|)} \sum (-1)^{s_2-\lambda_2+s_3+\lambda_3|\lambda_1|} D(B_1)^{\lambda_1}{}_{\lambda_1} \cdot$$
$$\cdot D^{s_2}(B_2)^{\lambda_2}{}_{\lambda_2} D^{|\lambda_3|}(B_3)^{-\lambda_3}{}_{-\lambda_1} D^{s_4}(B_4)^{-\lambda_4}{}_{-\lambda_4} \cdot$$
$$\cdot d^{|\lambda_1|}\left(-\frac{\theta_s}{2}\right)^{\lambda_1}{}_{\lambda_1} d^{s_2}\left(-\frac{\theta_s}{2}\right)^{\lambda_2}{}_{-\lambda_2} d^{s_3}\left(\frac{\theta_s}{2}\right)^{\lambda_3}{}_{-\lambda_3} d^{s_4}\left(\frac{\theta_s}{2}\right)^{\lambda_4}{}_{\lambda_4} \ldots$$

The dots stand for quantities kinematically regular at $s = m^2$.

b) Kinematical pole at $s = m^2$.

$$B_3 = B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{k}} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix}.$$

From the expansion (A-I.5) we deduce that near $s = m^2$

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \quad \text{behaves like} \quad \sqrt{k}^{-2|\lambda_1|+2|\lambda_3|-2|\lambda_1|-2|\lambda_3|-2s_3-2s_4}$$

and

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \quad \text{behaves like} \quad (s-m^2)^{-2[s_3-\max(|\lambda|,|\mu|)]}.$$

c) Singularity at $s = 0$.

The result is the same as in the general case, namely

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \quad \text{behaves near} \quad s=0 \quad \text{like} \quad \sqrt{s}^{-|\lambda-\mu|}.$$

The results are given in Table XI.

B_2 $m_3 = m_4 = m'$; $m_1 = m_2 = 0$; $s_3 = s_4 = s_f$.

The general study applies to the threshold $s = 4m'^2$ but now ψ_{34} coincides with $\sqrt{s}$ ($\omega_i = k = (\sqrt{s}/2)$, $i = 1, 4$; $p = \sqrt{s-4m'^2}/2$).

a) Kinematical branch point at $s = 0$.

We use the frame R_I with the gauge choice $p_i = p_3$ ($-2p_1 \cdot p_3 = t - m'^2$, $-2p_2 \cdot p_3 = u - m'^2$).

Near $s = 0$ $\cos\theta_s \simeq 1/\sqrt{s}$;

$$D^{|\lambda_i|}(\sigma p_3 B_i^{\dagger -1})^{\Lambda_i}{}_{\lambda_i} \simeq \sqrt{s}^{-\lambda_i}, \qquad D^{|\lambda_i|}(B_i)^{\lambda_i}{}_{\lambda_i} \simeq \sqrt{s}^{-\lambda_i}. \qquad i = 1, 2.$$

If we turn around $s = 0$

$$\left(\frac{\omega_3 - p}{m}\right) \to -\left(\frac{\omega_3 - p}{m}\right)^{-1}, \qquad \theta_s \to \theta_s \pm \pi,$$

$$d^{s_3}(\theta_s)^{\Lambda_3}{}_{-\lambda_3} \to (-1)^{s_3 \pm \lambda_3} d^{s_3}(\theta_s)^{\Lambda_3}{}_{\lambda_3}$$

and

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s}) = (-1)^{2s_3}(-1)^{(\lambda_1+\lambda_2)}(-1)^{\lambda_3+\lambda_4}(-1)^{s_3+s_4\pm\mu} M_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s}),$$

so that

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s}) = \eta_{34}(-1)^{\sum_i \lambda_i} \hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s}).$$

TABLE XVIII.

Frame R_{IV}

$$t=\frac{P}{\sqrt{s}}, \qquad n_2(R)=q_{34}, \qquad n_3(R)=W,$$

$$\boldsymbol{e}(P_1P_3)\begin{cases}\frac{1}{2}k^2\sin\theta_s\\ \frac{1}{2}k(p-k\cos\theta_s)\\ \frac{i}{2}kp\sin\theta_s\end{cases} \qquad \boldsymbol{e}(P_2P_3)\begin{cases}-\frac{1}{2}k^2\sin\theta_s\\ \frac{1}{2}k(p+k\cos\theta_s)\\ -\frac{i}{2}kp\sin\theta_s\end{cases}$$

$L_{12}(1)=R_x\left(\frac{\pi}{2}\right)R_y(-\theta_s)B_1$

$L_{12}(2)=R_x\left(\frac{\pi}{2}\right)R_y(-\theta_s+\pi)B_2$

$L_{12}(3)=R_x\left(\frac{\pi}{2}\right)B_3$

$L_{12}(4)=R_x\left(\frac{\pi}{2}\right)R_y(+\pi)B_4$

where

$R_x\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$, Euler angle $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

and $R_x\left(\frac{\pi}{2}\right)R_y(-\varphi)$, Euler angle $\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

λ_1 and $\lambda_2<0$

$$\text{(A-I.6)}\qquad \left[\left(\frac{t-m^2}{m}\right)\right]^{2|\lambda_1|}\left[\left(\frac{u-m^2}{m}\right)\right]^{2|\lambda_2|}M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}=\sum(-1)^{\varepsilon_3-\lambda_3+\varepsilon_4+\lambda_4}\cdot$$

$$\cdot D^{|\lambda_1|}(B_1)^{\lambda_1}{}_{\lambda_1}D^{|\lambda_2|}(B_2)^{\lambda_2}{}_{\lambda_2}D^{\varepsilon_3}(B_3)^{-\lambda_3}{}_{-\lambda_3}D^{\varepsilon_4}(B_4)^{-\lambda_4}{}_{-\lambda_4}\varphi\exp\left[+i\theta_s(A_1+A_2)\right]\cdot$$

$$\cdot d^{|\lambda_1|}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{A_1}_{\lambda_1}d^{|\lambda_2|}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{A_2}_{-\lambda_2}d^{\varepsilon_3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{A_3}_{-\lambda_3}d^{\varepsilon_4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{A_4}_{\lambda_4}\sqrt{s}^{|M_1|+|M_2|}\ldots$$

$$M_1+M_2=A_1+A_2+A_3+A_4$$

The dots stand for quantities kinematically regular at $s=0$.

b) Kinematical pole at $s=0$.

The frame R_I is unfortunately not suitable for the search for kinematical poles because of the zeros of $(\omega_i+\varepsilon_i k)$ in the expansion A.

We introduce a new frame R_{IV} which is deduced the from R_{II} frame by a rotation through an angle $\pi/2$ around the 1-axis.

In this frame, near $s=0$

$$D^{|\lambda_i|}(B_i)^{\lambda_i}_{\lambda_i} \simeq \sqrt{s}^{-\lambda_i},$$

$$D^{\lambda_i}\left(\frac{\omega_3 - p\sigma_v}{m}\right)^{A_1}_{A_1'} \simeq \delta^{A_1}_{-A_1'}; \qquad D^{|\lambda_i|}(B_i^{\dagger -1}) \simeq \sqrt{s}^{\lambda_i},$$

$e^{i\theta_s} \simeq \sqrt{s}^{\pm 1}$ following the determination of $\sqrt{\Phi}$.
For $\lambda_1 < 0$ and $\lambda_2 < 0$, $M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ behaves like

$$\sqrt{s}^{-\lambda_1 \pm A_1 - \lambda_2 \pm A_2 + |M_1| + |M_2|} = \sqrt{s}^{|\lambda_1 \mp A_1| + |\lambda_2 \mp A_2| + |M_1| + |M_2|}.$$

For $\lambda_1 < 0$ and $\lambda_2 > 0$, $M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ behaves like

$$\sqrt{s}^{-\lambda_1 \pm A_1 + \lambda_2 \mp A_2 + |M_1| + |M_2|} = \sqrt{s}^{|\lambda_1 \mp A_1| + |\lambda_2 \mp A_2| + |M_1| + |M_2|}.$$

The same behaviour is valid for the two other helicity configurations. The exponent $\mathscr{A} = |\lambda_1 \mp A_1| + |\lambda_2 \mp A_2| + |M_1| + |M_2|$ is always a positive integer. Its minimum is obtained for $A_1 = \pm\lambda_1$, $A_2 = \pm\lambda_2$

$$\mathscr{A}_{\min} = \min |M_1 + M_2| \qquad \text{where} \begin{cases} M_1 + M_2 = \pm(\lambda_1 + \lambda_2) + A_3 + A_4, \\ |A_3| \leqslant s_f, \qquad |A_4| \leqslant s_f. \end{cases}$$

Obviously the minimum value will be zero if $M_1 + M_2$ happens to reach the value 0:

1) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$:

   a) $2s_f \leqslant \big||\lambda_1| - |\lambda_2|\big| \Rightarrow \mathscr{A}_{\min} = \big||\lambda_1| - |\lambda_2|\big| - 2s_f = |\lambda_1 + \lambda_2| - 2s_f$.

   b) $2s_f > \big||\lambda_1| - |\lambda_2|\big| \Rightarrow \mathscr{A}_{\min} = 0$.

2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$:

   a) $2s_f \leqslant |\lambda_1| + |\lambda_2| \Rightarrow \mathscr{A}_{\min} = |\lambda_1| + |\lambda_2| - 2s_f = |\lambda_1 + \lambda_2| - 2s_f$.

   b) $2s_f > |\lambda_1| + |\lambda_2| \Rightarrow \mathscr{A}_{\min} = 0$.

Using

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \left(\sin\left(\frac{\theta_s}{2}\right)\right)^{-|\lambda-\mu|}\left(\cos\left(\frac{\theta_s}{2}\right)\right)^{-|\lambda+\mu|} M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2},$$

we deduce that $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ behaves near $s=0$ like

$$\sqrt{s}^{\mathscr{A}_{\min} + \max(|\lambda|, |\mu|)} \qquad \text{with } \mathscr{A}_{\min} = \max\{0, |\lambda_1 + \lambda_2| - 2s_f\}.$$

All the results are given in Table XII.

B_3 $m_1 = m_2 = m$; $m_3 = m_4 = 0$; $s_1 = s_2 = s_{\text{in}}$.

The case is quite analogous to the preceding one. One finds easily that

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s}) = \eta_{12}(-1)^{\sum_i \lambda_i}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s})$$

and $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ behaves near $s=0$ like

$$\sqrt{s}^{\mathscr{A}_{\min}+\max(|\lambda|,|\mu|)} \qquad \text{with } \mathscr{A}_{\min} = \max\{0, |\lambda_3+\lambda_4| - 2s_i\} .$$

All the results are given in Table XIII.

Appendix II

Examples.

In this Appendix, we test the results obtained in this paper on examples for which one knows directly the relations between helicity amplitudes and invariant amplitudes assumed to enjoy Mandelstam analyticity properties.

1. *Test of the regularization of helicity amplitudes.*

A) Reaction $\gamma K \to \Lambda\bar{N}$. From helicity amplitudes, it is possible to get the R.H.A. $F^i_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}$ and $F^i_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}$ $i=1,2$. (Parity is conserved in this reaction.) For $F^i_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}$ one has: $\lambda=1$, $\mu=0$, $\eta_{34}=-1$, $m_{12}=-1$, $m_{34}=0$.

Then from Table III we deduce

$$\text{(A-II.1)} \qquad \begin{cases} F^1_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} = \sqrt{s}(s-m_2^2)^{-1}\psi_{34}^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} - \hat{M}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}] , \\ F^2_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} = \sqrt{s}(s-m_2^2)^{-1}\varphi_{34}^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} + \hat{M}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}] . \end{cases}$$

For $F^i_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}$ one has: $\lambda=1$, $\mu=1$, $\eta_{34}=1$, $m_{12}=-1$, $m_{34}=0$, then

$$\text{(A-II.2)} \qquad \begin{cases} F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = s(s-m_2^2)^{-1}\psi_{34}^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} - \hat{M}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}] , \\ F^2_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = s(s-m_2^2)^{-1}\varphi_{34}^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} + \hat{M}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}] . \end{cases}$$

By direct calculation Ader, Capdeville and Salin [15] have obtained (*)

$$\text{(A-II.3)} \qquad \begin{cases} -\tfrac{1}{4}[A_1 - (m_3+m_4)A_4] = \sqrt{s}(s-m_2^2)^{-1}\psi_{34}^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} - \hat{M}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}] , \\ -\tfrac{1}{4}[\psi_{34}^2 A_2 + A_1 + (m_4-m_3)A_3] = \sqrt{s}(s-m_2^2)^{-1}\varphi_{34}^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} + \hat{M}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}] , \\ -\tfrac{1}{4}[(m_3+m_4)A_1 - sA_4] = s(s-m_2^2)^{-1}\psi_{34}^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} - \hat{M}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}] , \\ \tfrac{1}{4}[sA_3 + (m_4-m_3)A_1] = s(s-m_2^2)^{-1}\varphi_{34}^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} + \hat{M}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}] . \end{cases}$$

---

[15] J. P. Ader, M. Capdeville and P. Salin: *Nucl. Phys.*, B 3, 407 (1967).

(*) Our convention for the particle « 2 » differs by a factor $(-1)^{s-\lambda}$ from that of Jacob and Wick. The results given in ref. [15] are calculated with the Jacob and Wick convention. It easy to verify that $\hat{f}^{\pm C}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = -\hat{f}^{\mp JW}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}$ and $\hat{f}^{\pm C}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} = \hat{f}^{\mp JW}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}$, where the indices C (respectively JW) refers to the convention of C-T.M.N. (respectively JW).

The relations (A-II.3) prove that our amplitudes $F^i_{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2};10}$ are free of kinematical singularities.

B) Reaction $\gamma\pi \to \mathcal{N}\overline{\mathcal{N}}$. Using the same procedure, we get the R.H.A. $F^i_{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2};10}$.

For $F^i_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}$, one has: $\lambda=1, \mu=0, m_{12}=-1, m_{34}=0, \lambda_3+\lambda_4+\lambda=2, 2s_f=1$, then

$$\text{(A-II.4)} \qquad \begin{cases} F^1_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} = (s-m_2^2)^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} - \hat{M}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}], \\ F^2_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} = \sqrt{s}(s-m_2^2)^{-1}\varphi_{34}^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} + \hat{M}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}]. \end{cases}$$

For $F^i_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}$, one has: $\lambda=1, \mu=1, m_{12}=-1, m_{34}=0, \lambda_3+\lambda_4+\lambda=1, 2s_f=1$, then

$$\text{(A-II.5)} \qquad \begin{cases} F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = \sqrt{s}(s-m_2^2)^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} - \hat{M}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}], \\ F^2_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = (s-m_2^2)^{-1}\varphi_{34}^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} + \hat{M}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}]. \end{cases}$$

ADER, CAPDEVILLE and SALIN [15] have obtained

$$\text{(A-II.6)} \qquad \begin{cases} -\frac{1}{4}(A_1 - 2mA_4) = (s-m_2^2)^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} - \hat{M}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}], \\ \frac{1}{4}(A_1 + sA_2) = \sqrt{s}(s-m_2^2)^{-1}\varphi_{34}^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} + \hat{M}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}], \\ -\frac{1}{4}(2mA_1 - sA_4) = \sqrt{s}(s-m_2^2)^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} - \hat{M}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}], \\ \frac{1}{4}A_3 = (s-m_2^2)^{-1}\varphi_{34}^{-1}[\hat{M}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} + \hat{M}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}]. \end{cases}$$

The relations (A-II.6) prove that our amplitudes $F^i_{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2};10}$ are free of kinematical singularities.

C) Reaction $\gamma\pi \to \gamma\pi$. From the Table XI, we get the R.H.A. $F_{10;\pm10}$ by the formula

$$F_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{|\lambda-\mu|}(s-m_2^2)^{2[s_3-\max(|\lambda|,|\mu|)]}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}.$$

Here $s_2=0$, $\max(|\lambda|, |\mu|)=1$. Then

$$F_{10;10} = \hat{M}_{10;10}(s-m_2^2)^{-2}, \qquad F_{10;-10} = s\hat{M}_{10;-10}(s-m_2^2)^{-2}.$$

By direct calculation, STERN [16] has obtained

$$\text{(A-II.7)} \qquad a = -\hat{M}_{10;10}(s-m_2^2)^{-2} \quad \text{and} \quad b = -s\hat{M}_{10;-10}(s-m_2^2)^{-2}.$$

The relations (A-II.7) prove that our amplitudes $F_{10;\pm10}$ are free of kinematical singularities.

D) Reaction $\gamma\gamma \to \pi\pi$. From the Table XII, we get the R.H.A. $F^i_{1\pm1;00}$: For $F^i_{11;00}$ one has: $\eta_{34}=1, \sum\lambda_i=2, m_{34}=0, \mathscr{A}_{\min}=2$.

---

[16] H. STERN: private communication.

Then

$$F^1_{11;00} = s^{-1}\hat{M}_{11;00}\,, \qquad F^2_{11;00} = 0\,;$$

for $F^i_{1-1;00}$ one has: $\eta_{34}=1$, $\sum\lambda_i=0$, $m_{34}=-2$, $\mathscr{A}_{\min}=0$. Then

$$F^1_{1-1;0} = s^{-1}\hat{M}_{1-1;0}(s-4m_2^2)^{-1}\,, \qquad F^2_{1-1;00}=0\,.$$

STERN [16] by direct calculation has obtained

$$a = s^{-1}\hat{M}_{11;00}\,, \qquad b = -\,s^{-1}\hat{M}_{1-1;00}(s-4m_2^2)^{-1}. \tag{A-II.8}$$

The relations (A-II.8) prove that our amplitudes $F_{1\pm1;00}$ are free of kinematical singularities.

2. *Test of kinematical constraints.*

A) Reaction $\gamma K\to\Lambda\bar{N}$. Constraint at $\varphi_{34}=0$ and $\psi_{34}=0$. From Table XV, we deduce near $\varphi_{34}=0$

$$\varphi_{34}\,T_{\tau_3\tau_4;10} \simeq \varphi_{34}{}^{1\pm(\tau_3+\tau_4)} \qquad \text{if } \exp[2i\theta_s]\simeq\varphi_{34}^{\pm2}\,,$$

near $\psi_{34}=0$

$$\psi_{34}\,T_{\tau_3\tau_4;10} \simeq \psi_{34}{}^{1\pm(\tau_3-\tau_4)} \qquad \text{if } \exp[2i\theta_s]\simeq\psi_{34}^{\pm2}\,,$$

where

$$T_{\tau_3\tau_4;10} = D^{s_3}(R^*)^{\lambda_3}{}_{\tau_3}\,D^{s_4}(R^*)^{\lambda_4}{}_{\tau_4}\,M_{\lambda_3\lambda_4;10}$$

The constraint at $\varphi_{34}=0$ is obtained for $\tau_3=\tau_4=\frac12$ if $\exp[2i\theta_s]\simeq\varphi_{34}^3$ and the constraint at $\psi_{34}=0$ is obtained for $\tau_3=-\tau_4=\frac12$ if $\exp[2i\theta_s]\simeq\psi_{34}^2$.

The constraints read:

$$\varphi_{34}[M_{\frac12\frac12;10}-M_{-\frac12-\frac12;10}]-i\varphi_{34}[M_{\frac12-\frac12;10}+M_{-\frac12\frac12;10}]\simeq\varphi_{34}^2 \qquad \text{if } \exp[2i\theta_s]\simeq\varphi_{34}^2,$$

$$\psi_{34}[M_{\frac12-\frac12;10}-M_{-\frac12\frac12;10}]-i\psi_{34}[M_{\frac12\frac12;10}+M_{-\frac12-\frac12;10}]\simeq\psi_{34}^3 \qquad \text{if } \exp[2i\theta_s]\simeq\psi_{34}^2.$$

With the definitions (A-II.1) and (A-II.2), we can express the helicity amplitudes as functions of the R.H.A. $F^i_{\frac12\pm\frac12;10}$.

$$M_{\frac12\frac12;10} = \tfrac12\sin\theta\,\hat{M}_{\frac12\frac12;10} = [F^1_{\frac12\frac12;10}\psi_{34}+F^2_{\frac12\frac12;10}\varphi_{34}]\left(\frac{s-m_2^2}{4\sqrt{s}}\right)\sin\theta\,,$$

$$M_{-\frac12-\frac12;10} = \tfrac12\sin\theta\,\hat{M}_{-\frac12-\frac12;10} = [-F^1_{\frac12\frac12;10}\psi_{34}+F^2_{\frac12\frac12;10}\varphi_{34}]\left(\frac{s-m_2^2}{4\sqrt{s}}\right)\sin\theta\,,$$

$$M_{\frac12-\frac12;10} = \cos^2\frac{\theta}{2}\,\hat{M}_{+\frac12-\frac12;10} = [F^1_{\frac12-\frac12,10}\psi_{34}+F^2_{\frac12-\frac12;10}\varphi_{34}]\left(\frac{s-m_2^2}{2s}\right)\cos^2\frac{\theta}{2}\,,$$

$$M_{-\frac12\frac12;10} = \sin^2\frac{\theta}{2}\,\hat{M}_{-\frac12\frac12;10} = [-F^1_{\frac12-\frac12;10}\psi_{34}+F^2_{\frac12-\frac12;10}\varphi_{34}]\left(\frac{s-m_2^2}{2s}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}\,,$$

or

$$M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} + M_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = \frac{1}{2}\sin\theta\left(\frac{s-m_2^2}{\sqrt{s}}\right) F^2_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}\varphi_{34}\,,$$

$$M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} - M_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = \frac{1}{2}\sin\theta\left(\frac{s-m_2^2}{\sqrt{s}}\right) F^1_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}\psi_{34}\,,$$

$$M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} + M_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} = \left(\frac{s-m_2^2}{2s}\right)(F^2_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}\varphi_{34} + F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}\psi_{34}\cos\theta)\,,$$

$$M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} - M_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} = \left(\frac{s-m_2^2}{2s}\right)(F^2_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}\varphi_{34}\cos\theta + F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}\psi_{34})\,.$$

As functions of the R.H.A. $F^i_{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2};10}$, the constraints read

$$\frac{\varphi_{34}(s-m_2^2)}{2\sqrt{s}}[F^1_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}\psi_{34}\sin\theta - i(\sqrt{s})^{-1}(F^2_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}\varphi_{34} + F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}\psi_{34}\cos\theta)] \simeq \psi^2_{34}$$

$$\text{if } \varphi_{34}\cos\theta = -i\sin\theta\,\varphi_{34}\ \ (e^{i\theta_0}\simeq\varphi_{34});$$

and

$$\frac{\psi_{34}(s-m_2^2)}{2\sqrt{s}}[\sqrt{s}^{-1}(F^2_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}\varphi_{34}\cos\theta + F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}\psi_{34}) - iF^2_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}\varphi_{34}\sin\theta]$$

$$\text{if } \psi_{34}\cos\theta = -i\sin\theta\,\psi_{34}\ \ (e^{i\theta_0}\simeq\psi_{34})\,.$$

The results are the following:

$$\text{(A-II.9)}\qquad \begin{cases} \sqrt{s}F^1_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} - F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = 0\,, & \text{at } \sqrt{s} = (m_3+m_4),\\ \sqrt{s}F^2_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} + F^2_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = 0\,, & \text{at } \sqrt{s} = (m_3-m_4). \end{cases}$$

Using eqs. (A-II.1)–(A-II.3), we deduce that

$$\text{(A-II.10}a\text{)}\qquad \begin{cases} F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = -\frac{1}{4}[A_1 - (m_3+m_4)A_4]\,,\\ F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = -\frac{1}{4}(m_3+m_4)\left[A_1 - \dfrac{s}{(m_3+m_4)}A_4\right], \end{cases}$$

$$\text{(A-II.10}b\text{)}\qquad \begin{cases} F^2_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} = \frac{1}{4}[\psi^2_{34}A_2] + \frac{1}{4}[A_1 - (m_3-m_4)A_3]\,,\\ F^2_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = \frac{1}{4}[\psi^2_{34}A_2] - \frac{1}{4}(m_3-m_4)\left[A_1 - \dfrac{s}{(m_3-m_4)}A_3\right]. \end{cases}$$

we check easily that constraints (A-II.9) are valid.

B) Reaction $\gamma\pi \to \mathcal{N}\overline{\mathcal{N}}$.

a) Constraint at $\varphi_{34}=0$. No special study is necessary to find the constraint. The result is analogous to the previous one namely

$$\text{(A-II.11)}\qquad \sqrt{s}F^1_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} = F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} \quad \text{at} \quad \sqrt{s} = 2m_3\,.$$

From eqs. (A-II.4)–(A-II.6), we deduce the value of $F^1_{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2};10}$

$$F^1_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} = -\tfrac{1}{4}(A_1 - 2mA_4)\,, \qquad F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = -\frac{1}{4}\left(A_1 - \frac{s}{2m}A_4\right)2m$$

and we check easily the constraint (A-II.11).

b) Constraint at $s=0$. Since $m_3 = m_4$; the pseudothreshold coincides with $s=0$. From Table XVI

$$\sqrt{s}\,T^s_{\tau_3\tau_4;\lambda_1 0} \simeq \sqrt{s}^{\,1\pm(\tau_3-\tau_4)} \qquad \text{if } \sqrt{\Phi(s,t)} = \mp\, i m_3 m_2^2 \text{ at } s=0.$$

That is to say

$$\sqrt{s}\,T^s_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} \simeq s \qquad \text{if } \sqrt{\Phi(s,t)} = -\,i m_3 m_2^2 \text{ at } s=0\,,$$

or

$$\text{(A-II.12)} \qquad \sqrt{s}[M^s_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} - M^s_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}] - i\sqrt{s}[M^s_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} + M^s_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}] \simeq s$$

$$\text{if } \sqrt{\Phi(s,t)} = -\,i m_3 m_2^2 \text{ at } s=0\,.$$

Using regularization formulae (A-II.4), (A-II.5), it is possible to express the helicity amplitudes as functions of the R.H.A. $F^i_{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2};10}$

$$M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} + M_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sin\theta\, F^2_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}(s-m_2^2)\sqrt{s-4m_3^2}\,,$$

$$M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} - M_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} = \left[\frac{1}{2\sqrt{s}}F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} + \frac{1}{2}F^2_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}\cos\theta\sqrt{s-4m_3^2}\right](s-m_2^2)$$

and to write the constraint eq. (A-II.12) as a function of the R.H.A.

$$(s-m_2^2)\left[F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} + F^2_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10}\sqrt{s-4m_3^2}\,\sqrt{s}\cos\theta - i\sin\theta\, F^2_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}\sqrt{s-4m_3^2}\right] \simeq s$$

$$\text{near} \quad s=0 \qquad \text{if } \sqrt{\Phi}(s,t) = -\,i m_3 m_2^2 + O(s);$$

with

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{s}(t-u)}{(s-m_2^2)\sqrt{s-4m_3^2}}\,, \qquad \sin\theta\sqrt{s-4m_3^2} = \frac{2\sqrt{\Phi}}{s-m_2^2} =$$

$$= -\,\frac{2im_3m_2^2}{(-m_2^2)} + O(s) = 2im_3 + O(s)\,.$$

Constraint (A-II.12) reads

$$\text{(A-II.13)} \qquad F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} + 2m_3 F^2_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10} = 0 \qquad \text{at } s=0\,.$$

Now, from eqs. (A-II.4)–(A-II.6)

$$F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = -\,\frac{2m_3A_1}{4} - \frac{sA_4}{4}\,,$$

$$F^2_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2};10} = \frac{A_1}{4} + \frac{sA_2}{4}\,,$$

which shows that at $s=0$,

$$F^1_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};10} = -2m_3 F^2_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};10}\,.$$

This equation is nothing but constraint (A-II.13).

3. *Application to Compton scattering on a nucleon.*

A) Reaction $\mathcal{N}\gamma \to \mathcal{N}\gamma$. From Table XI, $F_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{|\lambda-\mu|}(s-m^2)^{2M}\cdot \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ is free of kinematical singularities ($M = \frac{1}{2} - \max(|\lambda|;|\mu|)$). HEARN and LEADER [17] have written the helicity amplitudes as functions of six invariant amplitudes A_i free of kinematical singularities. We prove now that our regularization is compatible with Hearn and Leader's result if the A_i obey kinematical constraints in the forward (respectively backward) direction, *i.e.* at $t=0$ (respectively at $su=m^4$).

1) For $F_{\frac{1}{2}1;\frac{1}{2}1}$, $\lambda=\mu=-\frac{1}{2}$, $M=0$, so that $M_{\frac{1}{2}1;\frac{1}{2}1}/\cos(\theta/2)$ must be free of kinematical singularities, which is consistent with formula (2.21) (*) of ref. [17].

$$\frac{M_{\frac{1}{2}1;\frac{1}{2}1}}{\cos(\theta/2)} = m(A_1 - A_2) - \left(\frac{s-m^2}{2}\right)[A_5 - A_4 + 2A_6]\,.$$

2) For $F_{-\frac{1}{2}1;\frac{1}{2}1}$, $\lambda=-\mu=-\frac{1}{2}$, $M=0$, so that $\sqrt{s}M_{-\frac{1}{2}1;\frac{1}{2}1}/\sin(\theta/2)$ is free of kinematical singularities, consistent with

$$\frac{\sqrt{s}M_{-\frac{1}{2}1;\frac{1}{2}1}}{\sin(\theta/2)} = -\tfrac{1}{2}\{(s+m^2)(A_1+A_2) - (s-m^2)(m(A_4+A_6)+2A_3)\}\,,$$

(eq. (2.21) of ref. [17]).

3) For $F_{\frac{1}{2}-1;\frac{1}{2}1}$, $\lambda=-\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{3}{2}$, $M=-1$, so that

$$\frac{sM_{\frac{1}{2}-1;\frac{1}{2}1}}{\sin^2(\theta/2)\cos(\theta/2)(s-m^2)^2}$$

is free of kinematical singularities. Noting that $\sin^2(\theta/2)(s-m^2)^2/s = -t$, formula (2.21) of ref. [17] reads

$$F_{\frac{1}{2}-1;\frac{1}{2}1} = -\frac{1}{t}\left\{m(A_1+A_2) - \left(\frac{s-m^2}{2}\right)(A_4+A_6)\right\}.$$

We deduce that the A_i obey the kinematical constraint

$$m(A_1+A_2) - \left(\frac{s-m^2}{2}\right)(A_4+A_6) = B_1 t\,, \qquad \text{(A-II.14)}$$

where B_1 has the same analytic properties as functions A_i.

---

[17] A. C. HEARN and E. LEADER: *Phys. Rev.*, 126, 789 (1962).

(*) $M_{\{\lambda_i} = 8\pi W \Phi_i$.

4) For $F_{\frac{1}{2}-1;-\frac{1}{2}1}$, $\lambda=-\frac{3}{2}$, $\mu=\frac{3}{2}$, $M=-1$ so that

$$\frac{s\sqrt{s}M_{\frac{1}{2}-1;-\frac{1}{2}1}}{\sin(\theta/2)\sin^2(\theta/2)(s-m_2^2)^2}$$

is free of kinematical singularities. Formula (2.21) of ref. [17] reads

$$F_{\frac{1}{2}-1;-\frac{1}{2}1}=-\frac{1}{t}\left[(s+m^2)(A_1+A_2)-(s-m^2)(m(A_4+A_5)-2A_3)\right].$$

Hence another constraint appears at $t=0$, namely

(A-II.15) $$(s+m^2)(A_1+A_2)-(s-m^2)(m(A_4+A_5)-2A_3)=B_2 t\,,$$

where B_2 has the same analytic properties as the A_i.

5) For $F_{-\frac{1}{2}1;\frac{1}{2}1}$, $\lambda=-\frac{1}{2}$, $\mu=-\frac{3}{2}$, $M=-1$, so that

$$\frac{\sqrt{s}M_{-\frac{1}{2}1;\frac{1}{2}1}}{\sin(\theta/2)\cos^2(\theta/2)(s-m^2)^2}$$

is free of kinematical singularities.

Noting that $\cos^2(\theta/2)(s-m^2)^2=-(su-m^4)$, formula (2.21) of ref. [17] reads

$$F_{-\frac{1}{2}1;\frac{1}{2}1}=+\frac{1}{2(su-m^4)}\left[(s+m^2)(A_2-A_1)-m(s-m^2)(A_5-A_4)\right]$$

we deduce that the A_i obey the kinematical constraint

(A-II.16) $$(s+m^2)(A_2-A_1)-m(s-m^2)(A_5-A_4)=B_3(su-m^4)\,,$$

where B_3 has the same analytic properties as the A_i.

6) For $F_{-\frac{1}{2}1;-\frac{1}{2}1}$, $\lambda=-\frac{3}{2}$, $\mu=-\frac{3}{2}$, $M=-1$, so that

$$\frac{M_{-\frac{1}{2}1;-\frac{1}{2}1}}{\cos(\theta/2)\cos^2(\theta/2)(s-m^2)^2}$$

is free of kinematical singularities; formula (2.21) of ref. [17] reads

$$F_{-\frac{1}{2}1;-\frac{1}{2}1}=-\frac{1}{(su-m^4)}\left(m(A_2-A_1)-\frac{(s-m^2)}{2}(A_5-A_4-2A_6)\right)$$

Hence another constraint appears at $su=m^4$, namely

(A-II.17) $$2m(A_2-A_1)-(s-m^2)(A_5-A_4-2A_6)=B_4(su-m^4)\,,$$

where B_4 has the same analytic properties as the A_i.

B) Reaction $\mathcal{N}\overline{\mathcal{N}} \to \gamma\gamma$. From helicity amplitudes, it is possible to get the R.H.A. (see Table XIII).

1) For $F^i_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $2s_{1n}=1$, $\lambda=\mu=0$, $\eta_{12}=+1$, $\sum_i \lambda_i$ is odd,

$$m_{12}=s_1+s_2-\max\{|\lambda|\,|\mu|\}=1\,, \qquad f'=-1\,,$$

so that

$$F^1_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=\sqrt{t}^{-1}[M_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}+M_{11;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}]\,,$$
$$F^2_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=t^{-1}(t-4m^2)^{\frac{1}{2}}[M_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}-M_{11;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}]\,.$$

From Hearn and Leader's formula (2.23) (*)

$$F^1_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=2A_3\,, \qquad F^2_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=\frac{1}{t}[(t-4m^2)(A_2+A_1)+m(s-u)(A_4+A_5)]\,.$$

Hence, a kinematical constraint at $t=0$ appears, namely

(A-II.18) $$m(A_1+A_2)-\left(\frac{s-m^2}{2}\right)(A_4+A_5)=B'_1 t\,.$$

This constraint is nothing but the (A-II.14) constraint ($B'_1 \equiv B_1$).

2) For $F^i_{11;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$, $\lambda=1$, $\mu=0$, $\eta_{12}=+1$, $\sum_i \lambda_i$ is even,

$$m_{12}=0\,, \qquad f'=-2\,.$$

Furthermore $M_{11;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=M_{11;-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ so that

$$F^2_{11;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\equiv 0\,, \qquad F^1_{11;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{M_{11;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}{t\sin\psi}\,.$$

From Hearn and Leader's formula (2.23)

$$F^1_{11;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=-\frac{16\pi^2k^2\mathcal{M}_6}{\sin\psi}=\frac{1}{4}(A_4+A_5)\,.$$

3) For $F^i_{1-1;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $\lambda=0$, $\mu=2$, $\sum_i \lambda_i$ is odd,

$$\eta_{12}=+1\,, \qquad m_{12}=-1\,, \qquad f'=-2\,.$$

(*) Up to a phase;

$M_{(\lambda_i)}=16\pi^2k^2\mathcal{M}_i$ ($16\pi^2k^2\mathcal{M}_2=M_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ and $16\pi^2k^2\mathcal{M}_3=-M_{11;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$). $\cos\psi=\dfrac{u-s}{\sqrt{t(t-4m^2)}}$.

Furthermore $M_{1-1;\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = -M_{+1-1;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ so that

$$F^1_{1-1;\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \equiv 0\,, \qquad F^2_{1-1;\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{8t^{-1}M_{1-1;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-4m^2}\sin^2\psi}\,.$$

From Hearn and Leader's formula (2.23) (ref. ([17]))

$$F^2_{1-1;\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{16\pi^2 k^2 \mathscr{M}_1}{t\sqrt{t-4m^2}\sin^2\psi}\,.$$

Noting that $\sin^2\psi = +(su-m^4)^4/t(t-4m^2)$, we deduce

$$F^2_{1-1;\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = [(t-4m^2)(A_2-A_1) + m(u-s)(A_4-A_5)]\frac{1}{(su-m^4)}\,.$$

Hence a constraint appears at $su = m^4$ namely,

(A-II.19) $$(t-4m^2)(A_2-A_1) - m(s-u)(A_4-A_5) = B'_3(su-m^4)\,.$$

Constraints (A-II.19) and (A-II.16) can be shown to be equivalent.

4) For $F^i_{1-1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$, $\lambda = \pm 1$, $\mu = 2$, $\sum_i \lambda_i$ is even, $m_{12} = -1$, $f' = -2$, so that

$$F^1_{1-1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{2}{t(t-4m^2)\sin\psi}\left[\frac{M_{1-1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}{\cos^2(\psi/2)} + \frac{M_{1-1;-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}{\sin^2(\psi/2)}\right],$$

$$F^2_{1-1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}(t-4m^2)^{\frac{1}{2}}\sin\psi}\left[\frac{M_{1-1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}{\cos^2(\psi/2)} - \frac{M_{1-1;-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}{\sin^2(\psi/2)}\right].$$

Noting that

$$16\pi^2 k^2 \mathscr{M}_4 = -M_{1-1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad 16\pi^2 k^2 \mathscr{M}_5 = -M_{1-1;-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\,,$$

we find

$$F^1_{1-1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{(su-m^4)}[(A_4-A_5)t + 2(u-s)A_6]\,,$$

$$F^2_{1-1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2(su-m^4)}[(A_4-A_5)(u-s) + 2(t-4m^2)A_6]\,.$$

Hence two constraints appear at $su = +m^4$ namely

(A-II.20) $$\begin{cases} (A_4-A_5)t + 2(u-s)A_6 = B_5(su-m^4)\,, \\ (A_4-A_5)(u-s) + 2(t-4m^2)A_6 = B'_5(su-m^4); \end{cases}$$

in fact the two equations of (A-II.20) can be shown to be equivalent.

C) Kinematical constraints in $\mathcal{N}\gamma \to \mathcal{N}\gamma$ reaction. From Table XV

$$\text{(A-II.21)}\quad \begin{cases} (s-m^2)\,T^s_{\tau_3\lambda_4;\tau_1\lambda_2} \simeq (s-m^2)^{1+\tau_3+\tau_1} & \text{if } e^{i\theta_s} \simeq (s-m^2)^2 \text{ near } s=m^2, \\ (s-m^2)\,D^{s_1}(R)^{\lambda_1}_{\frac{1}{2}} L^{s_3}(R^*)^{\lambda_3}_{\frac{1}{2}} M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq (s-m^2)^2 & \text{if } e^{i\theta_s} \simeq (s-m^2)^2, \\ \textit{i.e.} & \\ (s-m^2)\,D^{s_1}(R)^{\lambda_1}_{\frac{1}{2}} L^{s_3}(R^*)^{\lambda_3}_{-\frac{1}{2}} M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq (s-m^2) & \lambda_4 = \pm 1,\ \lambda_2 = 1, \end{cases}$$

where the helicity amplitudes are expressed as functions of the R.H.A. $F_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$.

Equations (A-II.21) read,

$$\left((s-m^2)\cos\frac{\theta_s}{2} = -\,i(s-m^2)\sin\frac{\theta_s}{2} + O(s-m^2)^2\right)$$

$$\text{(A-II.22)}\quad \begin{cases} F_{\frac{1}{2}1;\frac{1}{2}1} - (su-m^4)\left(F_{-\frac{1}{2}1;-\frac{1}{2}1} + \dfrac{2}{\sqrt{s}} F_{-\frac{1}{2}1;\frac{1}{2}1}\right) \simeq (s-m^2)^2, \\ \dfrac{F_{-\frac{1}{2}-1;\frac{1}{2}1}}{\sqrt{s}} + t\left(\dfrac{F_{\frac{1}{2}-1;-\frac{1}{2}1}}{\sqrt{s}} - 2F_{\frac{1}{2}-1;\frac{1}{2}1}\right) \simeq (s-m^2)^2, \\ F_{\frac{1}{2}1;\frac{1}{2}1} + (su-m^4)F_{-\frac{1}{2}1;-\frac{1}{2}1} \simeq (s-m^2)\,, \\ F_{-\frac{1}{2}-1;\frac{1}{2}1} - tF_{-\frac{1}{2}-1;-\frac{1}{2}1} \simeq (s-m^2). \end{cases}$$

From Hearn and Leader's formulae (2.21),

$$F_{\frac{1}{2}1;\frac{1}{2}1} = m(A_2 - A_1) - \frac{(s-m^2)}{2}(A_5 - A_4 + 2A_6)\,,$$

$$-(su-m^4)F_{-\frac{1}{2}1;-\frac{1}{2}1} = m(A_2 - A_1) - \frac{(s-m^2)}{2}(A_5 - A_4 - 2A_6)\,,$$

$$\frac{-2(su-m^4)}{\sqrt{s}} F_{-\frac{1}{2}1;\frac{1}{2}1} = -\frac{(s+m^2)}{\sqrt{s}}(A_2 - A_1) + \frac{m}{\sqrt{s}}(s-m^2)(A_5 - A_4)\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}} F_{-\frac{1}{2}-1;\frac{1}{2}1} = -\frac{1}{2}\left[\frac{(s+m^2)}{\sqrt{s}}(A_1 + A_2) - \frac{(s-m^2)}{\sqrt{s}}\left(m(A_4 + A_5) + 2A_3\right)\right],$$

$$\frac{t}{\sqrt{s}} F_{\frac{1}{2}-1;\frac{1}{2}1} = -\frac{1}{2}\left[\frac{(s+m^2)}{\sqrt{s}}(A_1 + A_2) - \frac{(s-m^2)}{\sqrt{s}}\left(m(A_4 + A_5) - 2A_3\right)\right],$$

$$-2tF_{\frac{1}{2}-1;\frac{1}{2}1} = 2m(A_1 + A_2) - (s-m^2)(A_4 + A_5)\,,$$

noting that $(s+m^2)/\sqrt{s} = 2m + O((s-m^2)^2)$ and $\sqrt{s} = m + O(s-m^2)$, eqs. (A-II.22) read

$$\begin{aligned} (A_1 - A_2)O((s-m^2)^2) &\simeq (s-m^2)^2, \\ -(A_1 + A_2)O((s-m^2)^2) &\simeq (s-m^2)^2, \\ -2A_5(s-m^2) &\simeq (s-m^2)\,, \\ \frac{4A_3}{m}(s-m^2) &\simeq (s-m^2)\,, \end{aligned}$$

which shows that kinematical constraints (A-II.22) are valid.

D) Kinematical constraints in $\mathcal{N}\overline{\mathcal{N}}\to\gamma\gamma$ reaction.

1) Constraints at $t=4m^2$. From Table XVI

$$\text{(A-II.23)}\quad \begin{cases} (t-4m^2)^{\frac{1}{2}}\,T^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\tau_1\tau_2}\simeq(t-4m^2)^{(1+\tau_1+\tau_2)/2} & \text{if } \epsilon^{2i\varphi}\simeq(t-4m^2)\,,\\ i.e.\\ (t-4m^2)^{\frac{1}{2}}[D^{s_1}(R)^{\lambda_1}{}_{\frac{1}{2}}D^{s_2}(R)^{\lambda_2}{}_{\frac{1}{2}}M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}]\simeq(t-4m^2)\\ \text{if } \epsilon^{2i\varphi}\simeq(t-4m^2),\ \lambda_4=\pm1,\ \lambda_3=1\,. \end{cases}$$

Equations (A-II.23) read

$$\text{(A-II.24)}\quad \begin{cases} (t-4m^2)^{\frac{1}{2}}[M_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}-M_{11;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}+2iM_{11;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}]\simeq(t-4m^2)\,,\\ (t-4m^2)^{\frac{1}{2}}[2M_{1-1;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}+i(M_{1-1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}+M_{1-1;-\frac{1}{2}\frac{1}{2}})]\simeq(t-4m^2)\,. \end{cases}$$

From Hearn and Leader's formulae (2.23),

$$\begin{aligned} (t-4m^2)^{\frac{1}{2}}(M_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}-M_{11;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}) &= (t-4m^2)(A_2+A_1)+m(s-u)(A_4+A_5)\,,\\ 2(t-4m^2)^{\frac{1}{2}}M_{11;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} &= \frac{t(A_4+A_5)}{2}\sin\psi(t-4m^2)^{\frac{1}{2}},\\ 2(t-4m^2)^{\frac{1}{2}}M_{1-1;\frac{1}{2}\frac{1}{2}} &= (t-4m^2)(A_2-A_1)+m(u-s)(A_4-A_5)\,,\\ (t-4m^2)^{\frac{1}{2}}(M_{1-1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}+M_{1-1;-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) &= (A_4-A_5)\,\frac{t}{2}\sin\psi(t-4m^2)^{\frac{1}{2}}\,. \end{aligned}$$

Noting that $-i\sin\psi(t-4m^2)^{\frac{1}{2}}=\cos\psi(t-4m^2)^{\frac{1}{2}}=(u-s)/\sqrt{t}$, we check easily that eqs. (A-II.24) read,

$$(t-4m^2)(A_2+A_1)\simeq(t-4m^2)\,,\qquad (t-4m^2)(A_2-A_1)\simeq(t-4m^2)\,,$$

which shows that kinematical constraints (A-II.24) are valid.

2) Constraints at $t=0$. From eq. (4.6),

$$\sum_{\{\lambda_1,\lambda_2\}}d^{\frac{1}{2}}(-\chi_1)^{\lambda_1}{}_{\lambda_1'}d^{\frac{1}{2}}(\chi_2)^{\lambda_2}{}_{\lambda_2'}M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\simeq\sqrt{t}^{\,|\lambda_3+\lambda_4+\lambda_2'-\lambda_1'|}\,,$$

the constraint at $t=0$ appears for $\lambda_3=\lambda_4=1$, $\lambda_2'=-\lambda_1'=\frac{1}{2}$, namely

$$2\sin\chi_1 M_{11;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}+M_{11;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}+M_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}+\cos\chi_1(M_{11;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}-M_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\simeq t^{\frac{1}{2}}.$$

Noting that $\cos\chi_1\simeq t^{\frac{1}{2}}$, $M_{11;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}+M_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\simeq t^{\frac{1}{2}}$, $M_{11;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}-M_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\simeq t$ and $M_{11;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\simeq t^{\frac{1}{2}}$, the kinematical constraints read

$$\text{(A-II.25)}\qquad 2M_{11;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\sin\chi_1+M_{11;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}+M_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\simeq t^{\frac{1}{2}}.$$

From Hearn and Leader's formulae (2.23),

$$M_{11;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} + M_{11;\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 2t^{\frac{1}{2}}A_3 ,$$

$$2\sin\chi_1 M_{11;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = -\frac{2mt^{\frac{1}{2}}(st+(s-m^2)^2)}{(t-4m^2)(s-m^2)}(A_4+A_5) .$$

Equation (A-II.25) read

$$\frac{(s-m^2)}{2m}(A_4+A_5)+2A_3 \simeq t . \tag{A-II.26}$$

But the A_i obey kinematical constraints at $t=0$ (eqs. (A-II.14), (A-II.15)), and eq. (A-II.26) is nothing but another way to write these constraints ($2A_3=-(A_1+A_2)+Ct$) which shows that kinematical constraint at $t=0$ is valid.

— ————

TROISIEME PARTIE

METHODE de CALCUL PLUS DIRECTE

PREMIER CHAPITRE

EXPOSE de la METHODE

Récemment, Raynal [RAY. 69] a utilisé une nouvelle méthode pour déterminer les singularités et les contraintes des amplitudes d'hélicité dans le cas de particules massives.

Cette méthode résout le problème posé d'une façon plus unifiée que la méthode précédente et définit de façon plus précise le sens des résultats obtenus. Enfin, elle permet de calculer les contraintes sans avoir à utiliser le croisement des amplitudes d'hélicité de la voie s et de la voie t .

Il nous semble donc intéressant de comparer cette méthode avec celle que nous avons utilisée et de voir, dans quelques cas particuliers, les améliorations qu'elle peut apporter.

(1.1) - Principe de la méthode -

Le point de départ de la méthode de Raynal est donné par les propriétés analytiques des amplitudes spinorielles :

$$\mathfrak{M}_{A_3 A_4 A_1 A_2}\ (p_3 p_4 p_1 p_2)$$

qui sont des fonctions définies sur l'ensemble E dont les éléments $\{p_i\}$ sont formés par quatre quadrivecteurs tels que les p_i soient réels $i = 1, 2, 3, 4$ $(p_i^0 > 0)$

$$p_i^2 = m_i^2 \qquad \text{et} \qquad p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

et qui est la valeur limite d'une fonction holomorphe définie dans un domaine de l'espace $\overline{E}$ où :

les p_i sont complexes ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$p_i^2 = m_i^2 \qquad \text{et} \qquad p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

et les singularités des prolongements analytiques dans $\overline{E}$ de ces amplitudes spinorielles sont uniquement d'ordre dynamique.

Considérons maintenant une projection π de l'espace $\overline{E}$ sur l'espace des invariants s et t :

$$\left\{p_i\right\} \xrightarrow{\pi} (s,t) \qquad (s = (p_1 + p_2)^2 \; ; \; t = (p_1 - p_3)^2$$

L'amplitude d'hélicité $M_{\lambda_3 \lambda_4 \lambda_1 \lambda_2}(s,t)$ est une fonction définie sur $\pi(\overline{E})$, les amplitudes d'hélicité et les amplitudes spinorielles sont reliées par l'égalité :

$$M_{\lambda_3 \lambda_4 \pm|\lambda_1| \lambda_2}(s,t) = \mathfrak{M}^{(\pm)}_{A_3 A_4 A_1 A_2}(p_3 p_4 p_1 p_2)$$

$$D^{|\lambda_1|}{}_{H^{\pm}(p_1 p_3)} {}^{A_1}_{\pm|\lambda_1|} \; D^{s_2}(L_{12}(p_2))^{A_2}{}_{\lambda_2} \; D^{s_3}(L_{12}(p_3)\epsilon)^{A_3}{}_{\lambda_3} \; D^{s_4}(L_{12}(p_4)\epsilon)^{A_4}{}_{\lambda_4}$$

$$\mathfrak{M}^{\pm}_{A_3 A_4 A_1 A_2}(p_3 p_4 p_1 p_2) = M_{\lambda_3 \lambda_4 \pm|\lambda_1|}(\pi\left\{p_i\right\}) \qquad \text{(I-1)}$$

$$D^{|\lambda_1|}{}_{\left((H^{\pm}(p_1 p_3))^{-1}\right)} {}^{\pm|\lambda_1|}_{A_1} \; D^{s_2}(L_{12}^{-1}(p_2))^{\lambda_2}{}_{A_2} \; D^{s_3}(\epsilon L_{12}^{-1}(p_3))^{\lambda_3}{}_{A_3} D^{s_4}(\epsilon L_{12}^{-1}(p_4))^{\lambda_4}{}_{A_4}$$

$$H^{+}(p_1 p_3) = \frac{\sigma \cdot p_3}{2 p_3 p_1} L \qquad H^{-}(p_1 p_3) = \frac{m_3}{2 p_3 p_1} L^{+-1} \qquad \text{(I-2)}$$

Supposons maintenant que $\mathfrak{M}^{(\pm)}_{A_3 A_4 A_1 A_2}(p_3 p_4 p_1 p_2)$ est analytique dans un voisinage du point $\left\{\overset{\circ}{p}_i\right\}$ et choisissons une fonction $\left\{\rho_i(s,t)\right\}$ qui soit une application de l'espace des invariants dans l'espace $\overline{E}$, telle que :

$$\pi \circ \left\{\rho_i(s,t)\right\} = (s,t)$$

$$\left\{\rho_i(s,t)\right\} \circ \pi \left\{\overset{\circ}{p}_j\right\} = \left\{\overset{\circ}{p}_i\right\}$$

L'équation (I-1) peut alors s'écrire :

$$M_{\lambda_3 \lambda_4 \pm|\lambda_1| \lambda_2}(s,t) = \mathfrak{M}^{(\pm)}_{A_3 A_4 A_1 A_2}\left(\left\{\rho_j(s,t)\right\}\right)$$

$$D^{|\lambda_1|}(H^{\pm}(\rho_1(s,t),\rho_3(s,t)))^{A_1}_{\pm|\lambda_1|} D^{s_2}(L_{12}(\rho_2(s,t)))^{A_2}_{\lambda_2} D^{s_3}(L_{12}(\rho_3(s,t)\epsilon))^{A_3}_{\lambda_3} D^{s_4}(L_{12}(\rho_4(s,t)\epsilon))^{A_4}_{\lambda_4}$$

Si $\rho_j(s,t)$ est choisie analytique dans un voisinage de $\pi\left\{\overset{\circ}{p}_i\right\}$, $\mathfrak{M}^{(\pm)}_{A_3 A_4 A_1 A_2}\left(\left\{\rho_j(s,t)\right\}\right)$ est aussi une fonction analytique de (s,t) dans un voisinage de $\pi\left\{\overset{\circ}{p}_i\right\}$ et les singularités cinématiques vont apparaître seulement dans les fonctions :

$$D^{s_i}\left(L_{12}(\rho_i(s,t))\right)^{A_i}_{\lambda_i}$$

La méthode proposée est donc une méthode qui permet de raisonner directement par équivalence entre les propriétés d'analyticité des amplitudes spinorielles et celles des amplitudes d'hélicité. De plus, alors que l'on ne sait pas exprimer explicitement les amplitudes de Joos en fonction des amplitudes d'hélicité, nous pouvons ici inverser les relations (I-1) afin d'obtenir directement les contraintes

(1.2) - Singularités cinématiques -

Nous allons d'abord voir que la méthode de Cohen-Tannoudji, Morel et Navelet et celle de Raynal sont équivalentes pour les singularités cinématiques situées aux seuils et pseudo-seuils.

En effet, la méthode de Raynal consiste à trouver une application $\left\{\rho_i(s,t)\right\}$ (ou $\left\{\Lambda\rho_i(s,t)\right\}$ en utilisant les propriétés de covariance des amplitudes spinorielles) qui n'ait pas de singularités au voisinage du point étudié. Nous savons alors que les amplitudes spinorielles sont régulières.

De notre côté, nous avons utilisé la forme explicite des amplitudes spinorielles et trouvé une transformation de Lorentz rendant ce développement régulier.

Le procédé est donc le même : rendre les amplitudes spinorielles régulières à l'aide d'une transformation de Lorentz. Du fait que c'est la même transformation qui peut être utilisée dans les deux méthodes, les coefficients des amplitudes spinorielles auront les mêmes singularités et, par conséquent, ces deux méthodes conduisent forcément au même résultat.

Il existe toutefois une légère différence pour les singularités en $\rho(s,t) = 0$. Pour voir d'où elle provient, nous devons d'abord introduire la notion d'orbite.

Considérons deux éléments $\left\{p_i\right\}$ et $\left\{q_i\right\}$ de l'espace $\overline{E}$, tels que :

$$\pi \cdot \left\{p_i\right\} = \pi \cdot \left\{q_i\right\} = (s,t)$$

nous dirons que les deux éléments $\left\{p_i\right\}$ et $\left\{q_i\right\}$ sont équivalents s'il existe une transformation de Lorentz Λ telle que :

$$\Lambda \left\{p_i\right\} = \left\{q_i\right\}$$

Si nous considérons maintenant un point (s_o, t_o) de l'espace des invariants et si nous considérons tous les éléments $\{p_i\}$ de $\overline{E}$ tels que :

$$\pi \cdot \{p_i\} = (s_o, t_o)$$

une question se pose alors : est-ce que tous les éléments ainsi obtenus sont équivalents ?

Pour cela considérons un point $\{\overset{\circ}{p}_i\}$ de $\overline{E}$ tel que :

$$\pi \{\overset{\circ}{p}_i\} = (s_o, t_o)$$

On peut considérer le sous-ensemble G constitué des éléments $\{p_i\}$ tels que :

$$G = \left\{ \{p_i\} \mid \{p_i\} = \Lambda \{p_i\} \quad \forall \Lambda \right\}$$

le sous-ensemble ainsi construit est l'orbite relative à l'élément $\{\overset{\circ}{p}_i\}$.

Il existera des orbites distinctes si, à partir d'une même valeur des invariants s et t , on peut obtenir des éléments $\{p_i\}$ et $\{q_i\}$ tels qu'ils ne puissent pas être reliés entre eux par une transformation de Lorentz.

Le problème important est donc de savoir quel est le nombre d'orbites correspondant à un couple d'invariants s et t . Nous allons énoncer le résultat obtenu par Hepp [HEP.63] .

Il existe une seule orbite si $\Phi(s,t) \neq 0$

Il existe trois orbites si $\Phi(s,t) = 0$

Nous pouvons prendre comme exemple l'élément $\{p_i\}$ tel que

$$\Phi(\pi \cdot \{p_i\}) = 0$$

p_1	p_2	p_3	p_4
k	ω	ω_3	ω_4
0	0	0	0
0	0	0	0
k	$-k$	p	$-p$

et définir les deux quadrivecteurs $\chi^{\pm}$

$$\chi^{\pm} = (0,\ 1/2,\ \pm i/2\ ,\ 0) \qquad \left(p_i\ \chi^{\pm} = 0 \quad \text{et} \quad (\chi^{\pm})^2 = 0 \right)$$

et définir deux nouveaux éléments $\left\{ p_i^+ \right\}$ et $\left\{ p_i^- \right\}$ de la façon suivante

$$p_1^+ = p_1 \qquad p_2^+ = p_2 \qquad p_3^+ = p_3 + \chi^+ \qquad p_4^+ = p_4 - \chi^+$$

$$p_1^- = p_1 \qquad p_2^- = p_2 \qquad p_3^- = p_3 + \chi^- \qquad p_4^- = p_4 - \chi^-$$

On peut vérifier que ces trois points ne peuvent pas être reliés par une transformation de Lorentz complexe mais qu'ils correspondent au même couple d'invariants s et t . En effet, dans les trois cas :

$$s = (\omega + k)^2 \qquad t = (\omega - \omega_3)^2 - (k - p)^2$$

nous avons par conséquent :

$$\pi \left\{ p_i \right\} = \pi \left\{ p_i^+ \right\} = \pi \left\{ p_i^- \right\}$$

L'amplitude d'hélicité pourra donc s'écrire de trois façons différentes suivant que l'on considère $\mathfrak{M}_{A_i} (p_i)$, $\mathfrak{M}_{A_i} (p_i^+)$ ou $\mathfrak{M}_{A_i} (p_i^-)$ et dans ces trois cas on obtient des propriétés analytiques différentes.

Notre résultat correspond à la première solution de Raynal et ce résultat est compréhensible car le fait de considérer l'orbite de $\left\{ p_i \right\}$ implique l'hypo-

thèse supplémentaire de saturation du domaine d'holomorphie des amplitudes spinorielles.

Nous avons fait implicitement cette hypothèse dans notre travail puisque nous avons utilisé le développement de Joos.

Nous allons voir que cette hypothèse élimine, dans la méthode de Raynal, les deux dernières possibilités.

En effet, si le domaine d'holomorphie $\overline{E}$ des amplitudes spinorielles est π saturé, nous avons :

$$\pi^{-1} \circ \pi(\overline{E}) = \overline{E}$$

Dans ce cas, $\overline{E}$ ne peut pas contenir les éléments $\left\{p_i^+\right\}$ et $\left\{p_i^-\right\}$ et la seule solution qui reste est celle que nous avons trouvée en utilisant le développement de Joos.

(1.3) - Application au cas $\gamma\gamma \rightarrow A\bar{A}$ -

Nous allons ici montrer comment la méthode de Raynal peut s'appliquer aux réactions à deux corps faisant intervenir deux photons. La méthode utilisée par Raynal ne peut pas s'appliquer directement, mais nous allons nous y ramener en utilisant quelques remarques dues à Navelet [NAV.69]. La méthode de Raynal s'applique bien au seuil $s = 4\,m^2$, mais n'est plus valable au voisinage de $s = 0$. Nous allons, par conséquent, étudier plus particulièrement les singularités des amplitudes d'hélicité au voisinage de ce point.

Si nous considérons un système de référence lié au système de centre de masse, nous pouvons constater que, dans ce cas particulier, les quadrivecteurs

correspondants auront systématiquement des singularités en $\sqrt{s}$, il n'est donc pas possible de trouver une transformation de Lorentz qui conduise à un système de centre de masse régulier au voisinage de $s = 0$. Mais on peut remarquer que les amplitudes spinorielles sont des fonctions uniquement de deux semi-bivecteurs, par exemple $\vec{e}(p_3, p_1)$ et $\vec{e}(p_3, p_2)$. Le problème est donc ramené à celui de trouver une base où $\vec{e}(p_3, p_1)$ et $\vec{e}(p_3, p_2)$ sont réguliers.

Pour cela, nous allons tout d'abord considérer la base RIV utilisée dans la deuxième partie. Ces deux vecteurs s'écrivent dans cette base :

$$\vec{e}(p_1, p_3) = \begin{cases} \frac{1}{2} k^2 \sin\theta_s \\ \frac{1}{2} k(p - k\cos\theta_s) \\ \frac{i}{2} kp \sin\theta_s \end{cases}$$

$$\vec{e}(p_2, p_3) = \begin{cases} -\frac{1}{2} k^2 \sin\theta_s \\ \frac{1}{2} k(p + k\cos\theta_s) \\ -\frac{i}{2} kp \sin\theta_s \end{cases}$$

Mais du fait que :

$$p = \frac{\sqrt{s - 4m^2}}{2} \qquad k = \frac{\sqrt{s}}{2} \qquad \sin\theta_s \simeq \cos\theta_s \simeq \frac{1}{\sqrt{s}}$$

nous voyons que les premières et deuxièmes composantes de ces vecteurs ne sont pas régulières au voisinage de $s = 0$. Il faut donc trouver une transformation de Lorentz qui rende régulières ces tri-vecteurs.

On est donc ramené à trouver une matrice $A \in SL2(C)$ telle que :

$$A\ \sigma \cdot e\ A^{-1} = \sigma \cdot \Lambda e$$

et qui transforme les trivecteurs $\vec{e}_1(p_1, p_3)$ et $\vec{e}_2(p_2, p_3)$ en vecteurs réguliers au voisinage de $s = 0$.

Du fait que la troisième composante de ces vecteurs est déjà régulière, il suffira de considérer une rotation autour de l'axe Oz , c'est-à-dire de prendre une matrice de la forme :

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{vmatrix}$$

On peut donc écrire l'équation matricielle :

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_3 & e_1 - ie_2 \\ e_1 + ie_2 & -e_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e'_3 & e'_1 - ie'_2 \\ e'_1 + ie'_2 & -e'_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} e_3 & a^2(e_1 - ie_2 \\ a^{-2}(e_1 + ie_2) & -e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e'_3 & e'_1 - ie'_2 \\ e'_1 + ie'_2 & -e'_3 \end{vmatrix}$$

d'où :

$$2e'_1 = a^2(e_1 - ie_2) + a^{-2}(e_1 + ie_2)$$

$$-2ie'_2 = a^2(e_1 - ie_2) - a^{-2}(e_1 + ie_2)$$

Or $e_1(p_1, p_3)$ et $e_2(p_1, p_3)$ (ou $e_1(p_2, p_3)$ et $e_2(p_2, p_3)$) sont équivalents à $\sqrt{s}$, il en est donc de même pour $e_1 \pm ie_2$

$$e_1 \pm ie_2 \simeq \sqrt{s}$$

et nous voyons par conséquent que pour obtenir des tri-vecteurs réguliers au voisinage de $s = 0$, il suffit de prendre une transformation de Lorentz telle que

$$a_1 = s^{+1/4} \qquad a_2 = s^{-1/4}$$

Si nous remarquons que les représentations de la transformation de Lorentz obtenue sont telles que

$$D^s(\Lambda_i)^{\mu}{}_{\nu} = a_i^{2\mu}\,\delta^{\mu}{}_{\nu} \qquad i = 1,2$$

nous voyons qu'il est possible de définir deux amplitudes spinorielles :

$$\mathfrak{M}^{+}{}_{A_3A_4A_1A_2}(p_i) = \sum_{i=1}^{4} D^{s_i}(\Lambda_1)^{A'_i}{}_{A_i}\,\mathfrak{M}_{A'_3A'_4A'_1A'_2}(\Lambda_1 p_i)$$

dont le comportement au voisinage de $s = 0$ est tel que

$$\mathfrak{M}^{+}{}_{A_3A_4A_1A_2}(p_i) \simeq \sqrt{s}^{\,\epsilon A_i}$$

et

$$\mathfrak{M}^{-}{}_{A_3A_4A_1A_2}(p_i) = \sum_{i=1}^{4} D^{s_i}(\Lambda_2)^{A'_i}{}_{A_i}\,\mathfrak{M}_{A'_3A'_4A'_1A'_2}(\Lambda_2 p_i)$$

dont le comportement au voisinage de $s = 0$ est tel que :

$$\mathfrak{M}^{-}{}_{A_3A_4A_1A_2}(p_i) \simeq \sqrt{s}^{\,-\epsilon A_i}$$

Ce résultat est tout à fait prévisible puisque, dans ce cas de masse, $\Phi(s,t)$ s'annule avec s . Nous sommes donc dans le cas où il y a trois orbites et, si l'on impose la saturation du domaine d'holomorphie des amplitudes spinorielles, on obtient la troisième solution :

$$\mathfrak{M}_{A_3A_4A_1A_2}(p_i) \simeq \sqrt{s}^{\,|\epsilon A_i|}$$

et , en utilisant le repère IV déjà utilisé pour ce cas de masse dans la deuxième partie (Table XVIII) , on obtient :

$$M_{\lambda_3 \lambda_4 \lambda_1 \lambda_2}(s,t) \simeq \sqrt{s}^{|\lambda_1 \mp A_1| + |\lambda_2 \mp A_2| + |A_1 + A_2 + A_3 + A_4|}$$

suivant que $e^{i\theta_s} \simeq \sqrt{s}^{\pm 1}$

et ce comportement est bien celui que nous avons déjà obtenu à l'aide du développement de Joos des amplitudes spinorielles.

(1.4) - Calcul des contraintes -

Nous venons de voir que les deux méthodes que nous comparons présentent peu de différences lorsqu'on les utilise pour extraire les singularités.

Il n'en est pas de même si l'on aborde le problème posé par les contraintes, car, dans ce cas, la méthode de Raynal est nettement plus directe.

En effet, pour calculer les contraintes dans la deuxième partie, nous avons dû faire intervenir les propriétés de croisement des amplitudes d'hélicité de la voie s et de la voie t , car il ne nous était pas possible d'exprimer les amplitudes invariantes en fonction des amplitudes d'hélicité.

Le gros avantage de la méthode de Raynal est de résoudre ce problème de façon directe, c'est-à-dire sans faire intervenir le croisement.

En effet, d'après la relation (I-2) , nous avons directement les contraintes en écrivant que les amplitudes spinorielles sont des fonctions régulières en s . Mais les contraintes écrites sous cette forme sont d'une utilisation peu pratique.

On peut retrouver les formes habituelles des contraintes en introduisant les amplitudes de transversité de Kotanski. Dans le cas de quatre particules massives, ce travail a été effectué indépendamment par Stapp [STA. 69] et Navelet [NAV. 69] . Nous allons utiliser leur méthode dans le chapitre suivant afin de retrouver les contraintes dans le cas où la particule 1 est de masse nulle.

DEUXIEME CHAPITRE

CONTRAINTES aux SEUILS et PSEUDO-SEUILS

La méthode utilisée ici est due à Stapp [STA. 69] et à Navelet [NAV. 69] qui ont vu indépendamment que le fait d'utiliser les amplitudes de transversité de Kotanski [KOT. 66] permettait d'améliorer encore la méthode de Raynal.

Cette méthode consiste à relier directement les amplitudes de transversité aux amplitudes spinorielles. On pourra donc trouver directement le comportement des amplitudes de transversité au voisinage des seuils et pseudo-seuils sans se servir des propriétés de croisement.

Suivant le travail de Kotanski, nous introduisons les amplitudes de transversité qui sont définies à partir des amplitudes d'hélicité de la façon suivante (nous considérons toujours le cas où la particule 1 est de masse nulle) :

$$T^{\tau_3\ \tau_4\ ;\ \pm|\lambda_1|\ \tau_2}(s,t) = M^{\lambda_3\,\lambda_4\ ;\ \pm|\lambda_1|\,\lambda_2}(s,t)$$

$$\otimes\ D^{s_2}(R)^{\lambda_2}{}_{\tau_2}\ D^{s_3}(R^*)^{\lambda_3}{}_{\tau_3}\ D^{s_4}(R^*)^{\lambda_4}{}_{\tau_4}$$

On peut par conséquent relier ces amplitudes aux amplitudes spinorielles en exprimant les amplitudes d'hélicité en fonction de celles-ci.

$$T^{\tau_3\,\tau_4\,;\,\pm|\lambda_1|\,\tau_2}(s,t) = \mathcal{M}^{(\pm)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_3p_4, p_1p_2) \otimes$$

$$D^{|\lambda_1|}_{(H^{\pm}(p_1,p_3))^{A_1}\,\pm|\lambda_1|}\, D^{s_2}_{(L_{12}(p_2)R)^{A_2}\,\tau_2}\, D^{s_3}_{(L_{12}(p_3)\epsilon R^*)^{A_3}\,\tau_3}\, D^{s_4}_{(L_{12}(p_4)\epsilon R^*)^{A_4}\,\tau_4}$$

$$H^{+}(p_1,p_3) = \frac{\sigma\cdot p_3}{2p_3\cdot p_1}\, L_{12}^{+-1}(p_1) \qquad H^{-}(p_1,p_3) = \frac{m_3}{2p_3\cdot p_1}\, L_{12}(p_1)$$

où $L_{12}(p_i)$ est la transformation de Lorentz définissant la tétrade d'hélicité i, R est une rotation de $-\pi/2$ autour de l'axe Ox

$$R = \frac{1 + i\,\sigma_x}{\sqrt{2}} \qquad \epsilon = -i\,\sigma_y$$

Les matrices R vérifient les propriétés suivantes :

$$R\ \sigma_y\ R^{+} = -\sigma_z \qquad R^{-1} = R^{*}$$

$$R^{+}\ \sigma_y\ R = \sigma_z \qquad R^{+} = R^{*}$$

(nous avons vu dans la deuxième partie que les quantités

$$D^{s_i}_{(R)^{\lambda_i}\,\tau_i}$$

diagonalisaient les matrices

$$d^{s_i}_{(\lambda)^{\lambda'_i}\,\lambda_i}$$

et par le fait même la matrice de croisement des amplitudes d'hélicité).

(2.1) - Formalisme général -

Pour l'étude des singularités aux seuils et pseudo-seuils, nous nous sommes placés dans des systèmes correspondant au centre de masse des deux particules incidentes, à une rotation près autour de Oy.

On peut donc écrire explicitement les formes des transformations de Lorentz $L_{12}(p_i)$ amenant la tétrade de référence sur de tels systèmes.

$$L_{12}(p_3)\in R^+ = \exp(-i\frac{\theta'}{2}\sigma_y)\left(\frac{m_3+\omega_3-p\sigma_z}{\sqrt{2m_3(\omega_3+m_3)}}\right)(-i\sigma_y)\,R^+$$

$$= R^+\exp(i\frac{\theta'}{2}\sigma_z)\left(\frac{m_3+\omega_3-p\sigma_y}{\sqrt{2m_3(\omega_3+m_3)}}\right)(i\sigma_z)$$

$$L_{12}(p_4)\in R^+ = \exp(-i\frac{(\theta'+\pi)}{2}\sigma_y)\left(\frac{m_4+\omega_4-p\sigma_z}{\sqrt{2m_4(\omega_4+m_4)}}\right)(-i\sigma_y)\,R^+$$

$$= R^+\exp(i\frac{(\theta'+\pi)}{2}\sigma_z)\left(\frac{m_4+\omega_4-p\sigma_y}{\sqrt{2m_4(\omega_4+m_4)}}\right)(i\sigma_z)$$

Pour $\lambda_1 < 0$:

$$\frac{m^3}{2p_3\cdot p_1}\,L_{12}(p_1) = R\,R^+\,\frac{m_3}{2p_3\cdot p_1}\exp(i\frac{\theta}{2}\sigma_y)\,\frac{1}{2}\left(\frac{1+k}{\sqrt{k}}+\frac{1-k}{\sqrt{k}}\sigma_z\right)$$

Pour $\lambda_1 > 0$:

$$\frac{\sigma\cdot p_3}{2p_3\cdot p_1}\,L_{12}^{\dagger-1}(p_1) = R\,R^+\,\frac{\sigma\cdot p_3}{2p_3\cdot p_1}\exp(i\frac{\theta}{2}\sigma_y)\,\frac{1}{2}\left(\frac{1+k}{\sqrt{k}}-\frac{1-k}{\sqrt{k}}\sigma_z\right)$$

$$L_{12}(p_2)\,R = \exp(i(\frac{\theta-\pi}{2})\sigma_y)\,\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{\frac{m}{\sqrt{s}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{s}}{m}}\right)+\left(\sqrt{\frac{m}{\sqrt{s}}}-\sqrt{\frac{\sqrt{s}}{m}}\right)\sigma_z\right\}\quad R$$

$$= R\exp(i\frac{(\theta-\pi)}{2}\sigma_z)\,\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{\frac{m}{\sqrt{s}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{s}}{m}}\right)-\left(\sqrt{\frac{m}{\sqrt{s}}}-\sqrt{\frac{\sqrt{s}}{m}}\right)\sigma_y\right\}$$

où θ' (resp. θ) est l'angle entre $\vec{p}$ (resp. $\vec{k}$) et l'axe Oz.

De la propriété de covariance des amplitudes spinorielles on déduit que :

$$\mathfrak{M}^{(\pm)}_{A_3A_4A_1A_2}(R^{-1}(p_3), R^{-1}(p_4), R^{-1}(p_1)R^{-1}(p_2)) = \mathfrak{M}^{(\pm)}_{A'_3A'_4A'_1A'_2}(p_3p_4;p_1p_2)$$

$$D^{|\lambda_1|}(R)^{A'_1}_{A_1}\, D^{s_2}(R)^{A'_2}_{A_2}\, D^{s_3}(R)^{A'_3}_{A_3}\, D^{s_4}(R)^{A'_4}_{A_4}$$

Par ailleurs :

$$D^{s}(R)^{a}_{b} = e^{i\pi s}\, D^{s}(R^{\mp})^{a}_{-b}$$

d'où :

$$e^{-i\pi(s_3+s_4)}\mathfrak{M}^{(\pm)}_{A_3A_4A_1A_2}(R^{-1}(p_3), R^{-1}(p_4), R^{-1}(p_1), R^{-1}(p_2)) = \mathfrak{M}^{(\pm)}_{A'_3A'_4A'_1A'_2}(p_3p_4; p_1p_2)$$

$$D^{|\lambda_1|}(R)^{A'_1}_{A_1}\, D^{s_2}(R)^{A'_2}_{A_2}\, D^{s_3}(R^{+})^{A'_3}_{A_3}\, D^{s_4}(R^{+})^{A'_4}_{A_4}$$

(2.2) - Contraintes en $s_{34} = 0$ -

Nous allons utiliser la base construite pour étudier les singularités en $s_{34} = 0$. Cette base est telle que :

$$\theta = 0 \qquad \theta' = \theta_s$$

On obtient alors pour $T^{s}_{\tau_3\,\tau_4\,\pm|\lambda_1|\;\lambda_2}(s,t)$ la forme explicite suivante :

$$T^{s}_{\tau_3\,\tau_4\,\pm|\lambda_1|\;\tau_2}(s,t) = (-1)^{s_3+s_4-\tau_3-\tau_4}\, e^{i(A_3+A_4)\theta_s}\, e^{i\pi(-A_2+A_4)}$$

$$\otimes\; D^{|\lambda_1|}\left(R^{+}\ \frac{\alpha(\pm)}{2p_3p_1}\left(\frac{1+k}{2\sqrt{k}} \mp \frac{1-k}{2\sqrt{k}}\,\sigma_z\right)\right)^{A_1}_{\pm|\lambda_1|}$$

$$D^{s_2}\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{m}{\sqrt{s}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{s}}{m}}\right)-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{m}{\sqrt{s}}}-\sqrt{\frac{\sqrt{s}}{m}}\right)\sigma_y\right)^{A_2}\tau_2 D^{s_3}\left(\frac{m_3+\omega_3-p\sigma_y}{\sqrt{2m_3(\omega_3+m_3)}}\right)^{A_3}\tau_3 D^{s_4}\left(\frac{m_4+\omega_4-p\sigma_y}{\sqrt{2m_4(\omega_4+m_4)}}\right)^{A_4}\tau_4$$

$$\otimes\ \mathcal{M}^{(\pm)}{}_{A_3A_4A_1A_2}\left(R^{-1}(p_3), R^{-1}(p_4), R^{-1}(p_1), R^{-1}(p_2)\right)$$

où $\alpha(+) = \sigma \cdot p_3$ $\qquad$ $\alpha(-) = m_3$

Dans ce développement, l'amplitude spinorielle est libre de singularités cinématiques à $s_{34} = 0$ puisque les quadrivecteurs $R^{-1} \cdot p_i$ sont réguliers en $s_{34} = 0$.

Pour $\varphi_{34} = 0$

Les termes correspondant aux particules 1 et 2 sont sans singularités.

D'autre part :

$$\frac{\omega_i+m_i-p\sigma_y}{\sqrt{2m_i(\omega_i+m_i)}} = \mathbb{1} \qquad \text{d'où} \qquad D^{s_i}\left(\frac{m_i+\omega_i-p\sigma_y}{\sqrt{2m_i(\omega_i+m_i)}}\right)^{A_i}\tau_i = \delta^{A_i}\tau_i$$

pour $i = 3,4$

en portant ces expressions dans la forme explicite des amplitudes de transversité on obtient :

$$T^s{}_{\tau_3\,\tau_4}{}^{\pm|\lambda_1|}\tau_2(s,t) \simeq e^{i(\tau_3+\tau_4)\theta_s}$$

près de $\varphi_{34} = 0$

Pour $\psi_{34} = 0$

Les termes correspondant aux particules 1 et 2 sont sans singularités.

D'autre part :

$$\frac{\omega_i+m_i-p\sigma_y}{\sqrt{2m_i(\omega_i+m_i)}} = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{si } \epsilon_{ij} = +1 \\ \pm i\sigma_y & \text{si } \epsilon_{ij} = -1 \end{cases} \qquad i,j = 3,4$$

d'où $D^{s_i}\left(\frac{m_i+\omega_i-p\sigma_y}{\sqrt{2m_i(\omega_i+m_i)}}\right)^{A_i} z_i = \delta^{A_i} z_i$ si $\epsilon_{ij} = 1$

$= \eta\, \delta^{-A_i} z_i$ si $\epsilon_{ij} = -1$

(on peut remarquer que la phase η n'intervient pas dans la suite des calculs)

En portant ces expressions dans la forme explicite des amplitudes de transversité on obtient :

$$T^s z_3\ z_4 \pm |\lambda_1|\ z_2^{(s,t)} \simeq e^{i\epsilon_{34}(z_3 - z_4)\theta_s}$$

près de $\psi_{34} = 0$

Ces équations ne sont rien d'autre que les contraintes cinématiques obtenues dans la deuxième partie en utilisant les relations de croisement.

(2.3) - Contraintes en $s_{12} = 0$ -

Nous allons utiliser la base construite dans la deuxième partie , pour étudier les singularités en $s_{12} = 0$. Cette base est telle que :

$$\theta = \theta_s \qquad \theta' = 0$$

Nous allons d'abord étudier le comportement des éléments relatifs à la particule de masse nulle.

Pour $\lambda_1 < 0$

$$H^- = R^+ \frac{m_3}{4p_3 \cdot p_1} \exp\left(i\frac{\theta}{2}\sigma_y\right)\left(\frac{1+k}{\sqrt{k}} + \frac{1-k}{\sqrt{k}}\sigma_z\right)$$

$$\simeq R^+ \frac{m_3}{4p_3 \cdot p_1} \begin{vmatrix} \cos\theta_s/2 & \sin\theta_s/2 \\ -\sin\theta_s/2 & \cos\theta_s/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1/\sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{vmatrix}$$

Or, au voisinage de $s_{12} = 0$ $\quad \cos \theta_s/2 \simeq \sin \theta_s/2 \simeq 1/\sqrt{k}$,

donc nous pouvons écrire :

$$H^- \simeq R^+ \frac{m_3}{4p_3 \cdot p_1} \begin{vmatrix} \frac{1}{k} & 1 \\ \frac{1}{k} & 1 \end{vmatrix}$$

Par conséquent :

$$D^{|\lambda_1|}_{(H^-)^{A'_1}} - |\lambda_1|$$

est régulier au voisinage de $s_{12} = 0$ car seuls les éléments de la deuxième colonne interviennent.

Pour $\lambda_1 > 0$

$$H^+ = R^+ \frac{\sigma \cdot p_3}{4p_3 \cdot p_1} \exp\left(i \frac{\theta_s}{2} \sigma_y \right)\left(\frac{1+k}{\sqrt{k}} - \frac{1-k}{\sqrt{k}} \sigma_z \right)$$

$$\simeq R^+ \frac{\sigma \cdot p_3}{4p_3 \cdot p_1} \begin{vmatrix} \cos \theta_s/2 & \sin \theta_s/2 \\ -\sin \theta_s/2 & \cos \theta_s/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{k} \end{vmatrix}$$

d'où

$$H^+ \simeq \begin{vmatrix} 1 & 1/k \\ 1 & 1/k \end{vmatrix}$$

et par conséquent :

$$D^{|\lambda_1|}_{(H^+)^{A'_1}} + |\lambda_1|$$

est régulier au voisinage de $s_{12} = 0$ car seuls les éléments de la première colonne interviennent.

Nous allons maintenant considérer le comportement des éléments relatifs à la deuxième particule.

Au voisinage de $s_{12} = 0$, nous savons que $s \simeq m^2$, donc la quantité

$$\left(\sqrt{\frac{m}{\sqrt{s}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{s}}{m}}\right) - \left(\sqrt{\frac{m}{\sqrt{s}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{s}}{m}}\right) \sigma_y$$

est équivalente à la matrice unité. Par conséquent :

$$D^{s_2}\left(\left(\sqrt{\frac{m}{\sqrt{s}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{s}}{m}}\right) - \left(\sqrt{\frac{m}{\sqrt{s}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{s}}{m}}\right) \sigma_y\right)^{A_2} \varepsilon_2 \simeq \delta^{A_2} \varepsilon_2$$

Enfin, nous pouvons constater que les quantités relatives aux particules 3 et 4 sont régulières au voisinage de $s_{12} = 0$. En portant les expressions que nous venons d'obtenir ai voisinage de $s_{12} = 0$ dans la forme explicite des amplitudes de transversité, on obtient :

$$T^{s}_{\varepsilon_3\, \varepsilon_4 \pm |\lambda_1|\, \varepsilon_2}(s,t) \simeq e^{i \varepsilon_2\, \theta_s}$$

et nous retrouvons encore les résultats obtenus dans la deuxième partie de notre travail. Mais il faut remarquer que la méthode utilisée ici donne ces résultats de façon presque immédiate , alors que nous avons dû, au cours de la seconde partie, utiliser les relations de croisement afin d'atteindre notre but.

TROISIEME CHAPITRE

CONCLUSIONS

Au cours de ce travail, nous avons étudié les propriétés analytiques des amplitudes d'hélicité en tant que fonctions des invariants s et t . Cette étude conduit à une définition de nouvelles amplitudes qui sont analytiques dans le domaine du plan (s,t) qui est la projection du domaine d'analyticité des amplitudes spinorielles (qui est l'espace des quadrivecteurs énergie-impulsion placés sur leur couche de masse).

Nos résultats sont valables pour toutes les configurations probables de masses, puisque nous n'avons écarté que quelques cas pathologiques. Ils sont aussi valables quelle que soit la valeur des spins et pour des réactions comportant une, deux ou trois particules de masse nulle.

Nous avons vu que ces résultats peuvent être obtenus par deux méthodes différentes. La méthode exposée dans la deuxième partie de cet ouvrage fut, chronologiquement, la première utilisée. Nous allons, par conséquent, rappeler d'abord les hypothèses de cette méthode, qui sont :

1°) L'analyticité du développement de Joos [JOO. 62] des amplitudes spinorielles.

2°) Les conditions de jauge que doivent satisfaire ces amplitudes telles qu'elles ont été écrites par Zwanziger [ZWA. 64] .

3°) L'hypothèse que le chemin de croisement de Bros, Epstein et Glaser [BEG.65] est encore utilisable si la réaction comporte des particules de masse nulle.

Les résultats obtenus sont de trois sortes :

1°) Les amplitudes d'hélicité peuvent être débarrassées de leurs singularités cinématiques en utilisant les mêmes méthodes que dans le cas des particules massives.

2°) Nous avons dérivé une matrice de croisement en utilisant un chemin permettant d'effectuer un prolongement analytique d'une région physique à l'autre. Le résultat est très simple : par le croisement, l'hélicité d'une particule de masse nulle est renversée. Ceci est en accord avec les propriétés bien connues des photons.

3°) En utilisant les amplitudes de transversité pour lesquelles le croisement donne une relation seulement entre une amplitude de la voie s et une amplitude de la voie t , on obtient des relations entre les amplitudes d'hélicité régularisées pour certaines valeurs de l'énergie totale du système, mesurée dans le centre de masse.

La méthode exposée au cours de la troisième partie donne les mêmes résultats que la précédente, excepté la matrice de croisement.

Son intérêt n'est donc pas dans les résultats obtenus mais dans la façon de les obtenir.

En utilisant les résultats de Hepp, Raynal a montré que l'on peut déduire

directement les propriétés analytiques des amplitudes d'hélicité à partir de celles des amplitudes spinorielles. En effet, les amplitudes spinorielles sont des fonctions régulières des quadrimoments; il suffit donc de choisir une base où ces quadrivecteurs soient réguliers. Ainsi les résultats sont obtenus beaucoup plus simplement puisque nous n'avons pas à considérer les propriétés analytiques de développement de Joos, mais uniquement celles des quadrivecteurs énergie-impulsion, ce qui simplifie considérablement les calculs intermédiaires. On peut donc constater que la méthode de Raynal, bien que plus simple, est très semblable à celle de Cohen-Tannoudji, Morel et Navelet [CMN. 68].

Mais il n'en est pas de même lorsque l'on veut écrire les contraintes, car nous avons vu dans la troisième partie de notre travail qu'il est possible, avec la méthode de Raynal, d'écrire les amplitudes spinorielles comme conbinaisons linéaires d'amplitudes d'hélicité. Ces formules ne sont pas d'une utilisation pratique, mais une dernière amélioration obtenue indépendamment par Navelet et par Stapp, permet de ramener ces contraintes aux formes simples obtenues dans la deuxième partie.

Il n'est donc plus nécessaire d'utiliser l'hypothèse du croisement faite dans la méthode de Cohen-Tannoudji, Morel et Navelet et nous nous trouvons donc en face d'une amélioration fondamentale de cette méthode.

Il est temps maintenant de voir quel parti on peut tirer des résultats obtenus au cours de notre travail.

Leur champ d'application se situe surtout dans l'élaboration de modèles phénoménologiques, spécialement les modèles du type de Regge.

En effet, dans ces modèles, on peut utiliser les amplitudes d'hélicité régularisées puisqu'elles sont de parité définie. En tenant compte des relations de croisement et des contraintes cinématiques que nous avons établies dans ce travail, il est tout d'abord possible d'écrire des formules phénoménologiques qui sont au moins cinématiquement correctes.

Cette possibilité offre de façon indirecte plusieurs avantages qui sont les suivants :

1°) Le fait d'avoir séparé les propriétés cinématiques des propriétés dynamiques permet de mettre en évidence les conséquences expérimentales de ces dernières, donc de tester les modèles dynamiques de façon beaucoup plus nette, les seules hypothèses étant maintenant d'origine dynamique.

2°) La connaissance exacte du comportement des amplitudes au voisinage de $t = 0$ permet de pouvoir déterminer celles d'entre elles qui seront prépondérantes à l'avant. Ceci permet d'éliminer certaines amplitudes, puisque les modèles de Regge ne sont valables que vers l'avant. Cette possibilité diminue par voie de conséquence le nombre de paramètres, ce que cherche à réaliser tout phénoménologiste.

3°) D'un autre côté, les contraintes, dans un modèle de Regge, conduisent à des égalités entre résidus, considérés comme fonctions de t, pour des valeurs particulières du transfert. On obtient donc des relations entre les paramètres, ce qui amène encore à diminuer les degrés de liberté du modèle phénoménologique utilisé.

En conclusion, les résultats que nous avons démontrés permettent, d'une part, de séparer les problèmes cinématiques des problèmes dynamiques et, d'autre part, de réduire le nombre de paramètres dans les modèles phénoménologiques et contribuent, par conséquent, à donner quelques informations supplémentaires sur tout modèle phénoménologique, quelle que soit son origine dynamique.

BIBLIOGRAPHIE de la TROISIEME PARTIE

BEG.65 J. Bros, H. Epstein et V. Glaser
Comm. Math. Phys. 1 , 240 (1965)

CMN.68 G. Cohen-Tannoudji, A. Morel et H. Navelet
Kinematical singularities, crossing matrix and kinematical constraints for two-body helicity amplitudes
Annals of Physics 46, 239 (1968)

HEP.63 K. Hepp , Hel. Phys. Acta 36, 355 (1963)

JOO.62 H. Joos , Fortschritte der Physik, 10, 65 (1962)

KOT.66 A. Kotanski , Acta Phys. Polon. 29, 699 (1966)
A. Kotanski , Acta Phys. Polon. 30, 629 (1966)

NAV.69 H. Navelet , Communication privée

RAY.69 J-C. Raynal, Kinematic properties of helicity amplitudes
Preprint 69/3 Orsay

STA.69 H-P. Stapp, Kinematic constraints on helicity amplitudes
Physical Review 174, 2091 (1969)

ZWA.64 D. Zwanziger, Lectures in theoretical Physics, vol. 7. a Boulder 1964

Vu et approuvé

Talence, le Octobre 1969

Le Doyen de la Faculté des Sciences

J. VALADE